Cálculo I

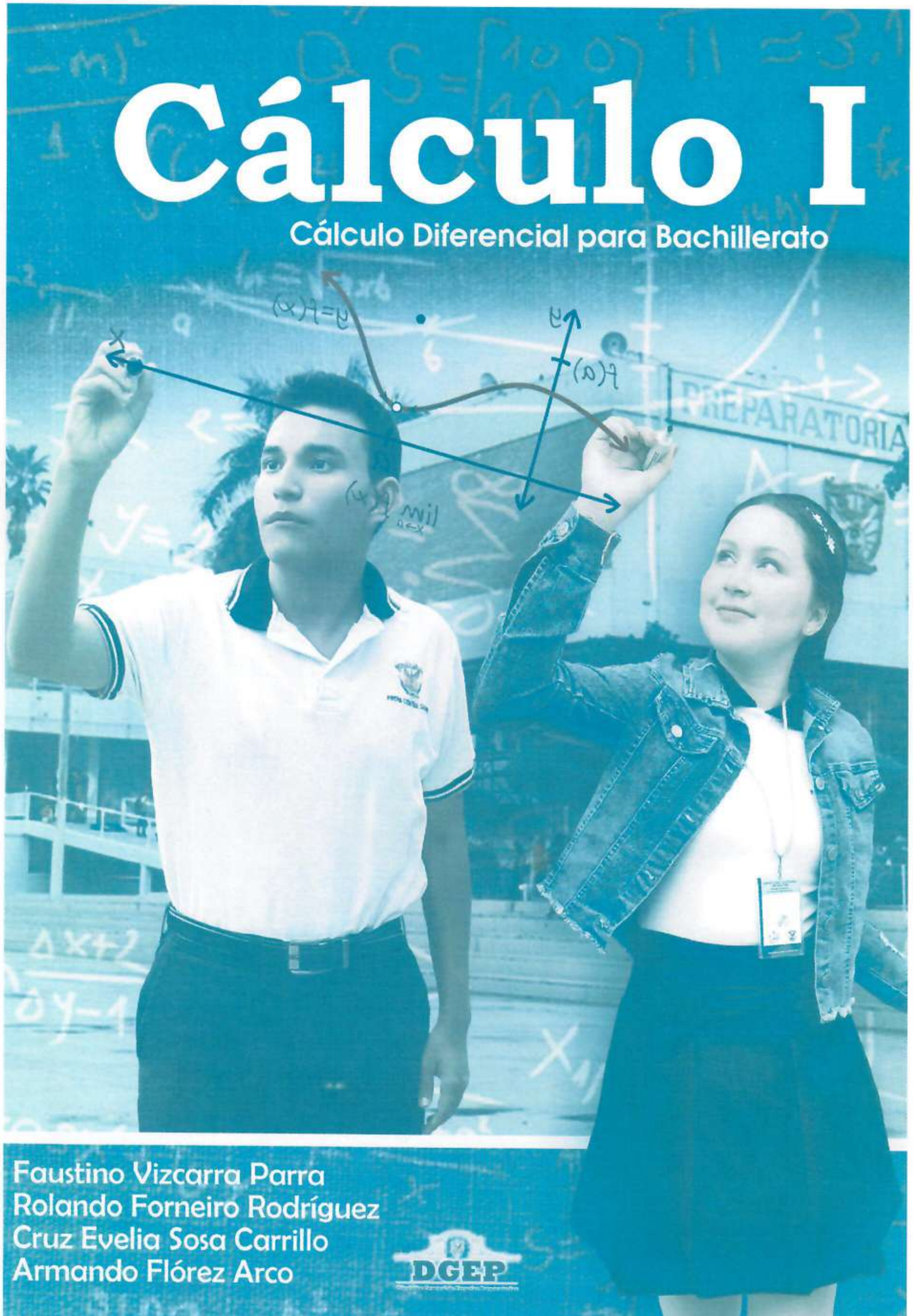
Cálculo Diferencial para Bachillerato

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Cruz Evelia Sosa Carrillo
Armando Flórez Arco

DGEP

Cálculo I

Cálculo Diferencial para Bachillerato



Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Cruz Evelia Sosa Carrillo
Armando Flórez Arco

DGEP

Cálculo I

Cálculo Diferencial para bachillerato

Cálculo por competencias

Autores
Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Cruz Evelia Sosa Carrillo
Armando Flórez Arco

UAS/DGEP

CÁLCULO I

CÁLCULO DIFERENCIAL PARA BACHILLERATO

Cálculo Diferencial por competencias

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Cruz Evelia Sosa Carrillo
Armando Flórez Arco

Primera edición, agosto de 2020

Diseño de portada e interior: Leticia Sánchez Lara
Maquetación Carol Judith Zazueta e Irán Ubaldo Sepúlveda León
Ilustraciones de interiores tomadas de Internet

Registro en trámite

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicatoria y agradecimientos

"El maestro deja una huella para la eternidad; nunca puede decir cuándo se detiene su influencia".

HENRY ADAMS

Armando Flórez Arco ha hecho del conocimiento y la enseñanza su vida. Difícilmente podríamos imaginarlo separado de las aulas, los libros y de sus constantes reflexiones en torno a la educación y su preocupación por las futuras generaciones que se formarán en las escuelas. Matemático, pedagogo, conversador, maestro de maestros, un humanista partidario de vivir y compartir las inagotables y enriquecedoras experiencias que le han dejado sus pasos por el mundo. Desde la Universidad Pedagógica de Matanzas, y aún desde antes, ha tomado la enseñanza como una misión, por medio de la cual podemos aspirar a transformar, para bien, nuestra realidad. Este incansable testigo, el niño que vio con asombro a los nueve años el surgimiento de una revolución, el caminante que recorrió las viejas calles "donde los cantantes nocturnos cantaban su amor a La Habana", el maestro de la Universidad de la capital cubana, llegó a estas tierras sinaloenses un día para quedarse. Su camino lo ha continuado en los más recónditos lugares de este Estado, con la plena seguridad de que la educación es la única forma de reconstruir el tejido social que se ha erosionado en nuestro tiempo. Cubano, mexicano, ni más lo uno que lo otro, sino lo uno con lo otro, Armando Flórez es un digno heredero del legado de Conrado Benítez, José Martí, Eustaquio Buelna, Genaro Estrada, José Emilio Pacheco, y muchos más. Por estas razones, por su enorme aportación al bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa, le dedicamos este humilde libro de Matemáticas. Por el enorme agradecimiento a su inagotable trabajo, no nos cansaremos de decir: Muchas gracias Doctor Armando Flórez Arco.

Por último, también se reconoce el esfuerzo y dedicación de los docentes que con sus contribuciones hicieron posible este libro.

Colaboradores:

Raúl Cárdenas López
Octavio Avilez
Eva Edith Verdugo Serrano
Jesús Martínez Cañedo
Policarpio Sicairos Avitia
José Juan García Leal
Jesus Antonio García Duarte
Heriberto Carlos Ayala Cruz
Héctor Benjamín Jacobo Cabanillas
Jorge Ramos Martínez
César Pilar Quintero Campos
Silvestre Trinidad Quintero Ibarra
Jonathan Sánchez Rodríguez
Levy Noé Inzunza Camacho
Alfonso Javier Salas Sánchez

Presentación

Este libro, se escribió para utilizarse en la asignatura de *Cálculo I,* correspondiente al quinto semestre de las fases propedéuticas Químico-Biológicas y Físico-Matemáticas, el cual está alineado al programa de estudio de dicha asignatura.

Como antecedentes, para abordar el contenido se requiere dominar la aritmética, el álgebra, la geometría plana, la trigonometría, la geometría analítica y las funciones numéricas, a esto se le conoce como precálculo. En este sentido, el libro, al inicio contiene una evaluación diagnóstica que permite saber qué conocimientos previos se tienen sobre el precálculo. Y a partir de ello, reorientes los hábitos de estudio y estrategias de aprendizaje, para conectar el nuevo conocimiento con el ya aprendido.

El nuevo conocimiento que se presenta en el libro, está distribuido en las siguientes tres unidades de aprendizaje:

- *Unidad de aprendizaje I:* Se aseguran las bases sobre las funciones numéricas, para luego iniciar con el estudio de límites (a partir de una noción intuitiva) a través de métodos gráficos, numéricos y analíticos, el cual se usa para definir la continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- *Unidad de aprendizaje II:* Los conceptos de límite y continuidad de una función, son parte esencial para definir el concepto central de este libro, que es la derivada de una función, la cual se presenta desde un enfoque físico (el problema de la velocidad instantánea) y desde uno geométrico (el problema de la recta tangente), como el límite de la razón de cambio promedio. Luego, se usa la definición de derivada para demostrar las fórmulas básicas de derivación, para determinar de manera más práctica la derivada de funciones algebraicas y trascendentes.
- *Unidad de aprendizaje III:* Se aborda el análisis y graficación de funciones mediante la determinación de sus valores extremos, de los intervalos donde son crecientes y decrecientes, concavidad y puntos de inflexión, todo esto a través de la primera y segunda derivada. Por último, se estudian aplicaciones de la derivada en problemas de optimización.

En cada unidad debes implementar diversas estrategias de aprendizaje para lograr el nivel idóneo de las competencias indicadas, el cual es progresivo. Para ello, se incluyen prácticas de referencia situada para motivar y estimular el interés, ejemplos resueltos, actividades para responder en el libro, ejercicios para resolver en clase y de tarea, una actividad intermedia que consiste en resolver una serie de ejercicios en equipo, para luego reflexionar sobre los resultados obtenidos y final de la unidad, se propone un problemario (producto integrador de la unidad), a través del cual debes mostrar el logro alcanzado. Además, al final de la tercera unidad, se cuenta con la evaluación sumativa (producto integrador del curso), la cual también es un problemario. También se incluye un solucionario con la respuesta de ejercicios seleccionados, así como un apéndice de fórmulas matemáticas.

El texto está escrito en un lenguaje y rigor lo más apegado posible al nivel de complejidad que se requiere para el nivel bachillerato, haciendo énfasis en la visualización de las funciones numéricas, a través de las representaciones gráficas y en las prácticas de referencia situadas para dotar de significado a los conceptos. Además, las explicaciones están redactadas con cuidado para asegurar la comprensión del que aprende. El color se utiliza pedagógicamente para resaltar los pasos importantes, destacar los métodos y la terminología, así como para resaltar representaciones gráficas de las funciones numéricas.

Esperamos que las mejoras incorporadas en la presente edición sean de agrado y contribuya al logro de sus objetivos académicos y personales, y que esta experiencia propicie el gusto por las matemáticas. De igual forma, agradecemos las sugerencias y propuestas que contribuyan a seguir mejorándolo y rectificar cualquier incongruencia o error que puede existir.

Atentamente

Culiacán Rosales, Sinaloa, Julio 2020

LOS AUTORES

Contenido

Evaluación diagnóstica

Evaluación diagnóstica para identificar logros o áreas de oportunidad sobre los conocimientos previos necesarios para construir e integrar el nuevo conocimiento, el cual se considera como punto de partida para realizar las actividades de aprendizaje que dan cuenta del nivel de logro de las competencias a desarrollar.

Al finalizar la evaluación diagnóstica, reflexiona sobre los resultados obtenidos, y establece la ruta de aprendizaje, así como los cambios necesarios en los hábitos de estudio y estrategias de aprendizaje a implementar para lograr un nivel óptimo del desarrollo de las competencias que se indican al inicio de cada unidad.

1, ¿Cuál es el resultado de realizar la siguiente operación?

$$\frac{7}{12}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$$

a) 5/8 b) 11/24 c) 5/12 d) 29/24

2. ¿Cuál es el resultado de realizar la siguiente operación?

$$\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(3\frac{2}{7}\right)$$

a) 16/315 b) 48/315 c) 80/315 d) 184/315

3. ¿Cuál es el resultado de realizar la siguiente operación?

$$\left(3\frac{7}{12}\right)\div\left(\frac{8}{9}\right)$$

a) $1\frac{5}{9}$ b) $1\frac{31}{32}$ c) $3\frac{5}{27}$ d) $4\frac{1}{32}$

4. ¿Qué cantidad se obtiene al resolver la siguiente operación?

$$(3+2)^2\{2^3+[(2)(4)-(3)(2)]\}$$

a) 100 b) 130 c) 190 d) 250

5. ¿Cuál es el resultado de simplificar a su mínima expresión el siguiente polinomio?

$$\frac{2}{3}xy^2+2x-\frac{1}{3}xy^2+\frac{2}{3}x^2y-5x$$

a) xy^2-3x b) $\frac{1}{3}x^2y-3x^2+\frac{2}{3}x^4y^2$ c) $\frac{1}{3}xy^2-3x+\frac{2}{3}x^2y$ d) $\frac{2}{3}x^2y-3x$

Evaluación diagnóstica

6. Efectúa la operación entre polinomios:

$$(5x^4 + 13x^2 - x + 10) - (-6x^4 + 9x^3 + 7)$$

a) $11x^4 + 4x^2 - 8x + 10$
b) $11x^4 + 9x^3 + 13x^2 - x + 17$
c) $11x^4 + 4x^2 - x + 3$
d) $11x^4 - 9x^3 + 13x^2 - x + 3$

7. ¿Cuál es el resultado de la siguiente división?

$$\left(-m^5n^2 - \frac{1}{2}m^4n^4 + \frac{2}{3}m^3n - 4mn^4\right) \div (-4m^5n^3)$$

a) $\frac{1}{4n} + \frac{n}{8m} - \frac{1}{6m^2n^2} + \frac{n}{m^4}$
b) $\frac{1}{4n} - \frac{n}{8m} - \frac{1}{6m^2n^2} - \frac{n}{m^4}$
c) $\frac{1}{4n} + \frac{mn}{8} - \frac{1}{6m^2n^2} - \frac{n}{m^4}$
d) $\frac{1}{4n} + \frac{2n}{m} - \frac{8}{3m^2n^2} + \frac{n}{m^4}$

8. ¿Cuál es el resultado de $-(-5)^2$?

a) 25
b) 5
c) -5
d) -25

9. Exprese en forma de potencia la expresión matemática $\sqrt[3]{x^5}$

a) x^8
b) $x^{5/3}$
c) x^{15}
d) $x^{3/5}$

10. Factorice el polinomio $6x^2 - 5x - 6$

a) $(2x - 3)(3x + 2)$
b) $(-2x - 3)(-3x + 2)$
c) $(2x + 3)(3x - 2)$
d) $(3x - 3)(2x - 2)$

11. Simplifique la expresión a su mínima expresión racional

$$\frac{2x^2 + 13x + 15}{6x^2 + 7x - 3}$$

a) $\frac{(2x + 3)(x + 5)}{(3x + 1)(2x - 3)}$
b) $\frac{3x - 1}{x + 5}$
c) $\frac{x + 5}{3x - 1}$
d) $\frac{(2x - 3)(x - 5)}{(3x - 1)(2x + 3)}$

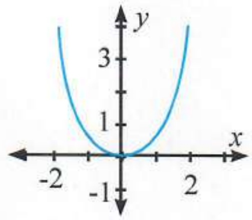
12. Es el valor de la pendiente de la recta en la ecuación $6x - 3y + 12 = 0$

a) -3 b) 2 c) 4 d) 6

13. Es el dominio de la función $y = \sqrt{4 - 9x}$

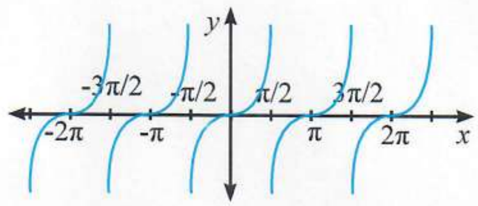
a) $(-\infty, 4/9)$ b) $[-4/9, \infty)$ c) $(-\infty, 4/9]$ d) $(-\infty, \infty)$

14. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función de la función cuadrática de la siguiente gráfica?



a) $(0, \infty)$ b) $[0, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $(-\infty, \infty)$

15. ¿A qué función corresponde la siguiente gráfica?



a) $\tan x$ b) $\tan(-x)$ c) $\tan(-2x)$ d) $\tan(2x)$

16. La expresión $(64y^2 - 36)$ puede factorizarse como $[4(ay + b)(ay - b)]$, donde a y b son:

a) $a = -4,\ b = 3$ b) $a = 4,\ b = 9$

c) $a = 4,\ b = 3$ d) $a = 8,\ b = 6$

17. El resutado de $(-4x + 3y)^3$, es

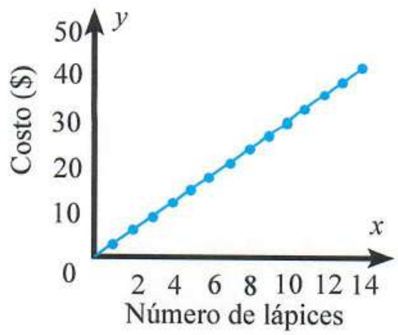
a) $64x^3 + 27y^3$ b) $-64x^3 + 27y^3$

c) $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$ d) $-64x^3 + 144x^2y - 108xy^2 + 27y^3$

18. ¿Cual es el valor de sen 60°?

a) 0 b) 1/2 c) 0.86 d) 1

19. La siguiente gráfica relaciona la cantidad de lápices y su costo. Cada lápiz tiene un costo de \$3.



¿De qué otra manera se puede representar la información de la gráfica anterior?

a) $y = 3x$

b) $y = x/3$

c)

Número de lápices	Costo ($)
0	3
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8

d)

Número de lápices	Costo ($)
0	0
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15

20. ¿Con cuál de las siguientes operaciones se obtiene como resultado -20?

a) (-5)(-4) b) $5 \div 4$ c) $-5 \div 4$ d) (5)(-4)

21. Relaciona el intervalo con la desigualdad correspondiente.

Intervalo	desigualdad
(2, 4)	$2 < x \leq 4$
[2, 4)	$2 \leq x \leq 4$
(2, 4]	$2 \leq x < 4$
[2, 4]	$2 < x < 4$

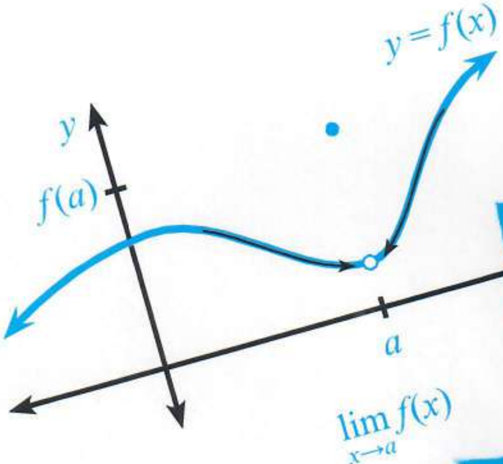
22. Las raíces de la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$, son

a) -1 y -12 b) -4 y 3 c) 4 y -3 d) -4 y -3

23. La expresión $\dfrac{\cos x}{\csc x \cdot \operatorname{sen} x}$, es igual a

a) $\cos x$ b) $\cos^2 x$ c) $\cos^2 x/ \operatorname{sen} x$ d) $\operatorname{sen} x$

Unidad 1



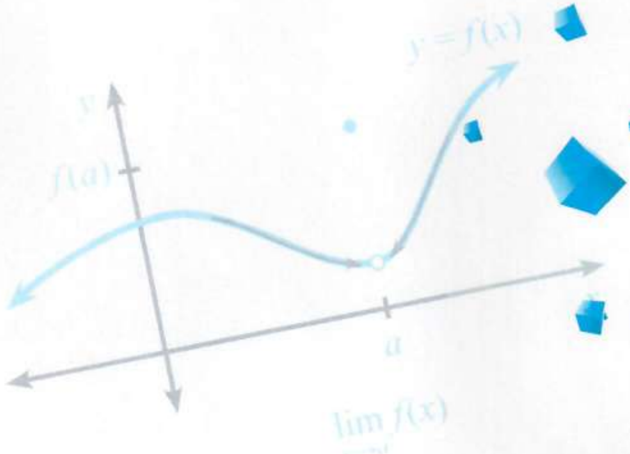
Aplica en forma crítica y reflexiva los límites y la continuidad de funciones numéricas, en la modelación, formulación y resolución de problemas, que le den significado mediante su uso.

Propósito de la unidad

Atributos de competencias genéricas a evaluar	Criterios de aprendizaje
4.1 Expresa ideas y conceptos mediante diversos sistemas de representación simbólica.	• Interpreta ideas y conceptos utilizando representaciones simbólicas de diversos campos disciplinares, académicos, científicos y/o tecnológicos.
8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.	• Colabora en equipos de trabajo, compartiendo los logros con el resto de los equipos participantes en un mismo grupo.

Competencias disciplinares extendidas a evaluar	Criterios de aprendizaje
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	• Construye las diferentes representaciones de una función algebraica y trascendente, mediante métodos basados en las restricciones de su domino y rango.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	• Resuelve problemas sobre límites de funciones algebraicas y trascendentes, aplicando métodos gráficos, numéricos o analíticos.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	• Interpreta la continuidad o discontinuidad en la gráfica de una función, aplicando la definición, operaciones y propiedades de las funciones continuas.

Límites y continuidad de funciones



1.1 Funciones

Propósito

Determina el dominio y rango de funciones algebraicas y trascendentes, mediante la exploración de su gráfica o de su expresión analítica.

Como **antecedente**, las funciones constituyen tema de estudio desde *Matemáticas II,* donde se introduce la función lineal y la función cuadrática; en *Matemáticas III,* se continúa con las funciones trigonométricas; en *Matemáticas IV,* se profundiza el estudio de las funciones polinomiales y se introducen las funciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas.

Recuerda que, para representar una función, las letras más comunes son f, g y h. Y para establecer con precisión su definición, necesitamos tres elementos que son fundamentales: el dominio, la regla de correspondencia y el rango. Una función relaciona a una variable "x" llamada variable independiente, con una variable "y" llamada variable dependiente, mediante $y = f(x)$, cuyo significado es que y está relacionada con x, a través de f, donde $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x". Por último, una función tiene diversas representaciones, tales como: fórmula algebraica, verbal, tabla de valores, conjunto de pares ordenados, gráfica y mediante un diagrama.

1.1.1 Definición y gráficas de funciones

Iniciemos con el concepto de **variable**, que en matemáticas se define como una cantidad que cambia. Se representa con una letra, siendo las más comunes x, y y z. Veamos el siguiente ejemplo.

Jesús es el de menor estatura de su clase y cada 6 meses se mide en la pared. Él ha registrado su crecimiento conforme ha pasado el tiempo y, con esa información, construyó una tabla para hallar una relación y encontrar un significado.

Edad (años)	Estatura (m)
14.5	1.60
15.0	1.62
15.5	1.64
16.0	1.66
16.5	1.68
17.0	1.70
17.5	1.72
18.0	1.74

La edad de Jesús ¿es una variable?_____ ¿Por qué?______________________________ ________, la cual la puedo representar con la letra____ y la estatura con la letra_______.

Unidad 1

Las variables forman parte de una **expresión algebraica**, que es un enunciado matemático compuesto por uno o más números, una o más variables y una o más operaciones aritméticas, por ejemplo:

$$4x,\ 0.5xy^2 + 3x - 1,\ \frac{\sqrt{2}}{y+z}$$

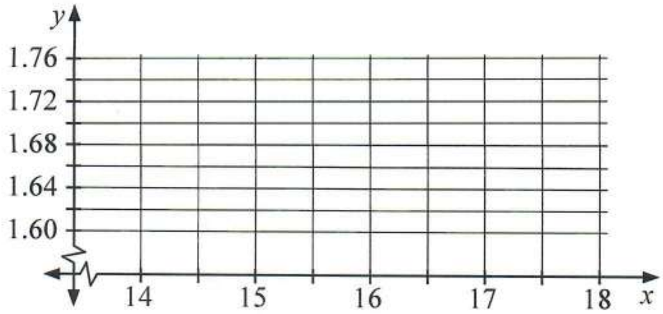
Al unir dos expresiones algebraicas mediante el signo igual, se obtiene una **ecuación algebraica**, por ejemplo:

$$2x = (x+1)^2,\ x^2 + y^2 = 25,\ y = x^3 - 2x + 1,\ x - 2y + \frac{z}{5} = 7,\ xy - y = 1,\ x^3 + xy^2 = y^2.$$

De las ecuaciones, hay unas que representan a una **función numérica**, en particular, las funciones que relacionan a una variable "x" llamada **variable independiente**, con una variable "y" llamada **variable dependiente**, mediante una relación entre ellas, que se representa por $y = f(x)$, conocidas como funciones de una variable.

De nuestro ejemplo, de la edad *vs* estatura.

- ¿Cuál es la variable independiente? _____
  Argumenta: ______________________________
- ¿Cuál es la variable dependiente? ______
  Argumenta: ______________________________



¿Qué tipo de función resulta? ______________________________

¿Cuál es modelo general de la función anterior? ______________________

¿Cuál es la ecuación de la función? ____________________________

En el ejemplo de la edad y de la estatura, se usan tres formas para representar a una función, ¿existen otras?

Una función tiene diversas representaciones: fórmula algebraica, tabla de valores, conjunto de pares ordenados, gráfica, verbal y mediante un diagrama. A continuación se presentan cuatro de ellas.

Fórmula algebraica

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1, & x \leq 2 \\ -(x-4)^2 + 6, & x > 2 \end{cases}$$

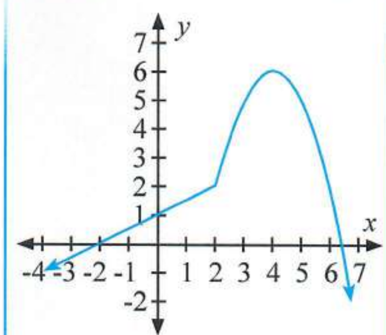
Tabla de valores

x	$f(x)$
-4	-1
-2	0
0	1
2	2
3	5
4	6
5	5
6	2

Pares ordenados

(-4 , -1)
(-2 , 0)
(0 , 1)
(2 , 2)
(3 , 5)
(4 , 6)
(5 , 5)
(6 , 2)

Gráfica



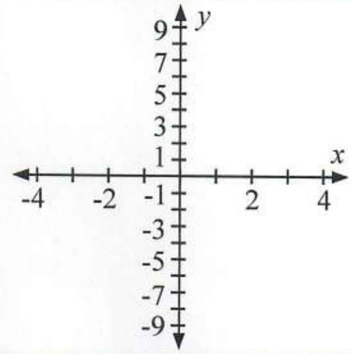
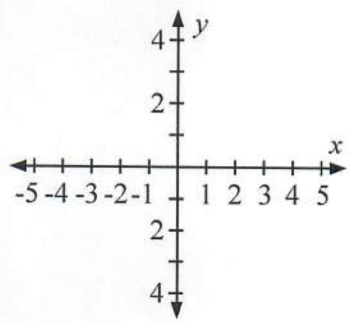
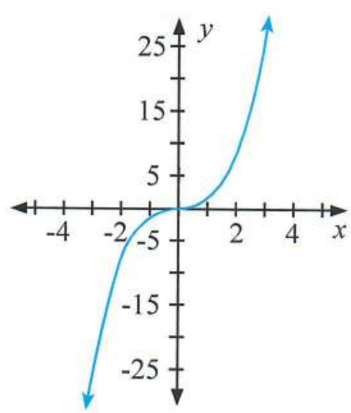
Ya vimos las diferentes formas de como se representa una función, a continuación veamos su definición.

Definiciones de función

1. Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una relación o regla de correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.
2. Una **función** es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
3. Una **función** es una relación entre dos variables (x, y) de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y sólo uno de los valores de y (la variable dependiente).

Estas definiciones son equivalentes, y cualquiera de ellas se puede usar para verificar si una ecuación representa o no a una función. Esto implica identificar el comportamiento en la ecuación que hace que no se satisfaga la definición de función. Para ello realiza la siguiente actividad.

Actividad 1.1

<table>
<tr><th>Completa la tabla</th><th>Escribe los pares ordenados (x, y) e identifica los valores de x relacionados con un mismo valor de y</th><th>Grafica los valores de la tabla y une los puntos</th><th>Escribe la ecuación</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-3</td><td>9</td></tr><tr><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table></td><td>(x, y)
(,)
(,)
$(-1, 1)$
(,)
(,)
(,)
(,)</td><td></td><td>$y =$</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td rowspan="2">1</td><td>-1</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td rowspan="2">2</td><td></td></tr><tr><td>$\sqrt{2}$</td></tr><tr><td rowspan="2">3</td><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td rowspan="2">4</td><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td rowspan="2">5</td><td>$-\sqrt{5}$</td></tr><tr><td></td></tr></table></td><td>(x, y)
(,)
(,)
(,)
(,)
$(2, \sqrt{2})$
(,)
(,)
(,)
(,)
$(5, -\sqrt{5})$
(,)</td><td></td><td>$y^2 = x$</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-4</td><td></td></tr><tr><td>-3</td><td>-27</td></tr><tr><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table></td><td>(x, y)
(,)
(,)
(,)
(,)
(,)
(,)
(,)
(,)
(,)</td><td></td><td>$y =$</td></tr>
</table>

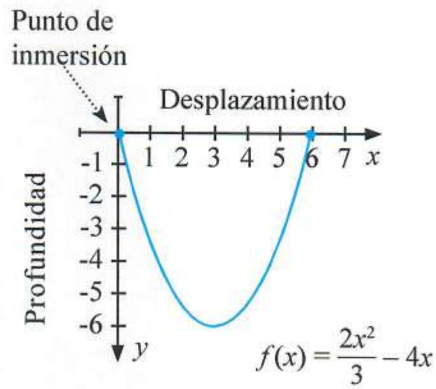
- La primera ecuación, ¿es función? ______________
  Argumenta: ______________
- La segunda ecuación, ¿es función? ______________
  Argumenta: ______________
- La tercera ecuación, ¿es función? ______________
  Argumenta: ______________

En la Actividad 1.1, la ecuación $y^2 = x$ tiene coordenadas de las abscisas que están asociadas con más de una coordenada de las ordenadas. Esto es lo que siempre debes identificar para saber que una ecuación no representa a una función.

Veamos el siguiente ejemplo, un buzo explora un arrecife y con un GPS registra su desplazamiento y profundidad en metros, lo que describe la función $f(x) = \frac{2x^2}{3} - 4x$. Para el desplazamiento se toma como referencia el punto de inmersión y para la profundidad el nivel del mar.

Desplazamiento (metros) x	Profundidad (metros) y
0	0
1	$-\frac{10}{3}$
3	-6
4	$-\frac{16}{3}$
6	0

$(0, 0)$
$\left(1, -\frac{10}{3}\right)$
$(3, -6)$
$\left(4, -\frac{16}{3}\right)$
$(6, 0)$



Observa que, tanto los pares ordenados, como la correspondencia entre x e y según la gráfica, nos muestran que la ecuación $f(x) = \frac{2x^2}{3} - 4x$ representa a una función.

Como conclusión, una ecuación representa a una función si ____.

Por otra parte, todas las ecuaciones que representan funciones, pueden expresarse inicialmente con la variable dependiente "y", con la notación de función "$f(x)$" o cualquier otra letra usada para denotar una función. Por ejemplo, $y = x^4 - 2x + 1$ es una función, por lo que también se puede escribir como $f(x) = x^4 - 2x + 1$.

Las siguientes funciones inician con la variable dependiente "y", sustitúyela por $f(x)$.

a) $y = \frac{2x}{x^2+1}$ ______________ b) $y = \sqrt{x-2}$ ______________

c) $y = \tan(2x)$ ______________ d) $y = \log(x^2-3) + e^{3x}$ ______________

Ahora pon a prueba lo aprendido sobre las funciones numéricas.

Unidad 1

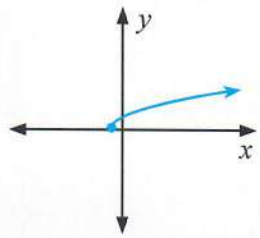
Ejercicios 1.1

1. Las siguientes afirmaciones representan a una función. Escribe cada una como un conjunto de pares ordenados y la expresión matemática que la representa.
   a) A cada número real se hace corresponder su cuadrado aumentado en dos.
   b) A cada número real se hace corresponder su recíproco menos uno.

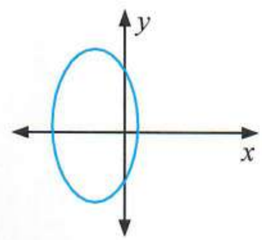
2. Indaga sobre la prueba de la recta vertical y realiza una analogía con la definición de función.

3. Aplica la prueba de la recta vertical, y determina si las siguientes gráficas representan a una función.

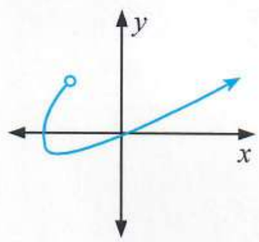
a)



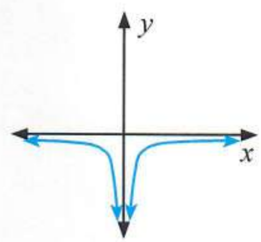
b)



c)



d)

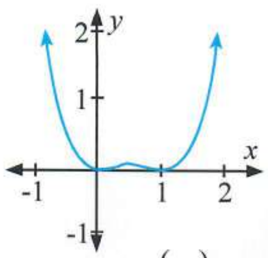


4. Evalúa la función en los valores indicados.
   a) $f(x) = 5x - 2$; $f(-2)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(0)$
   b) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $f(-3)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$
   c) $f(x) = -2x^3 + x$; $f(-\pi)$, $f(-0.4)$, $f(\sqrt[3]{2})$
   d) $f(x) = 3^x$; $f(-2)$, $f(-0.5)$, $f(2)$, $f(5)$
   e) $f(x) = \log_{10}(x - 4)$; $f(4.5)$, $f(6)$, $f(100)$
   f) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(\pi)$, $f(-1.5)$
   g) $f(x) = \sqrt{2x-3}$; $f(3)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(\sqrt{25})$, $f(8)$

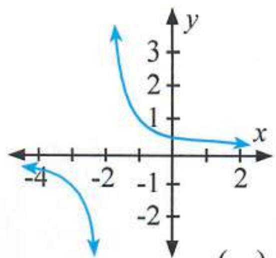
5. Si (6, 11) es un punto de la representación gráfica de la función $g(x)$, entonces $g(6) =$ ________.

6. Relaciona cada función dada con la gráfica que le corresponda.

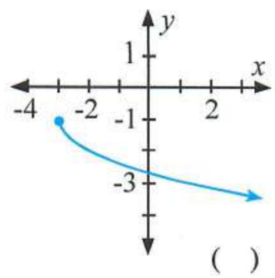
a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ b) $g(x) = -\sqrt{x+3} - 1$ c) $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$



( )



( )



( )

7. Tabula y realiza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x| + 1$ b) $f(x) = -2x + \dfrac{1}{3}$ c) $f(x) = 3x^2 + x - 3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1$ e) $f(x) = \ln(x-2)$ f) $f(x) = e^{2x} - 4$

g) $f(x) = 5^x$ h) $f(x) = \sqrt{x+2}$

8. Si $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$ y $g(x) = x - 3$, determina los pares ordenados de números reales que pertenecen a ambas funciones. Representa el significado gráfico que tienen estos pares ordenados.

Unidad 1

1.1.2 Dominio y rango de una función

Las funciones numéricas se pueden clasificar de diferentes maneras, por ejemplo, en crecientes y decrecientes, explícitas e implícitas, continuas y discontinuas. En nuestro caso, las clasificamos en algebraicas y trascendentes.

Funciones

- Algebraicas
  - Polinomiales: Ejemplos: $f(x) = 4x - 3$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$
  - Racionales: Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$
  - Irracionales: Ejemplos: $f(x) = \sqrt{x-4}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
- Trascendentes
  - Logarítmicas: Ejemplo: $f(x) = \log_{10}(x+1)$
  - Exponenciales: Ejemplo: $f(x) = 3^x$
  - Trigonométricas: Ejemplo: $f(x) = \text{sen } x$

Para conocer el valor "$f(x)$" de una función f en un valor específico de x, es necesario asignarle un número real a x para evaluarla (como en el ejercicio 4 de la sección de ejercicios 1.1). Al conjunto de estos valores de la variable independiente x se le conoce como **dominio** de la función, y cada número real x en el que se puede evaluar f está relacionado con un único valor $f(x)$, que se llama **imagen** de x. Al conjunto de estas imágenes de la variable independiente $f(x)$ se le conoce como **rango**, **recorrido** o **conjunto imagen** de la función.

Como sabes, hay infinitos números reales, por lo que, ¿toda función se puede evaluar en cada número real? De no ser así, entonces, ¿para qué números reales es posible evaluar una función? Para dar respuesta a estas preguntas, contesta la siguiente actividad.

Actividad 1.2

Determina el conjunto de números reales x, para los cuales es posible evaluar la función numérica f, así como el conjunto de sus imágenes. Utiliza la aplicación Desmos, GeoGebra, Wolfram Alpha o Mathematics para explorar la tabla de valores y la gráfica de la función.

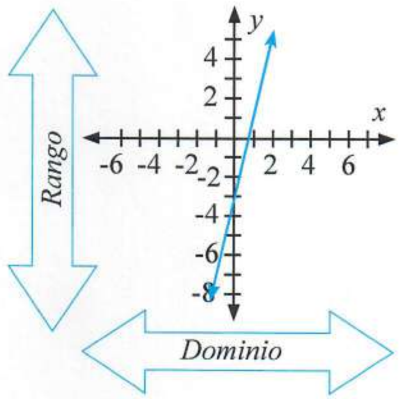
Función polinomial

Evalúa la función $f(x) = 4x - 3$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-15	
-9	
-3	
0	
2	
4	
6	
20	

¿Hay alguno o más números reales para los cuales no se puedan realizar las operaciones 4(   ) − 3?

____



Dom f = ________________

Rango f = ________________________

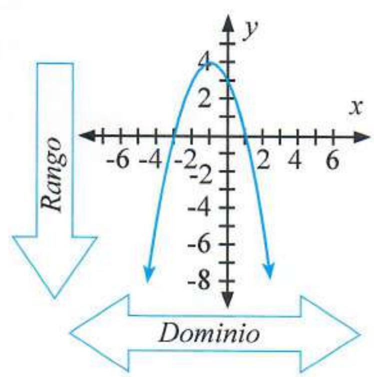
En una **función polinomial** de grado impar, el dominio es: $Dom\,f = R$ y el rango es: $Rango\,f = R$.

Evalúa la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-6	
-1	
0	
3	
4	
5	
8	
10	

¿Hay alguno o más números reales para los cuales no se puedan realizar las operaciones -(   )^2 − 2(   ) + 3?

____



El *Dom f* = ______________

Rango f = ________________________

En una **función polinomial de grado par,** $Dom\,f = R$ y $Rango\,f$ es un subconjunto de R.

Función racional

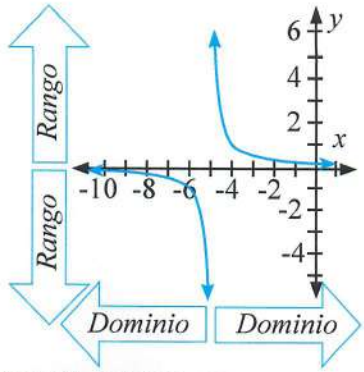
Evalúa la función $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-12	
-6	
-5	
-1	
0	
3	
8	

Para que la función pueda ser evaluada, el denominador "$x + 5$" debe ser ____________________

Asíntota vertical en $x =$ ____________

Dom f = ____________



Asíntota horizontal en $y =$ ____________

Rango f = ____________

Una asíntota es una recta que en un gráfico se acerca cada vez más a la curva, sin tocarla o cruzarla.

> En una **función racional**, *Dom f* = *R* − {x | x haga cero el denominador}
> y *Rango f* es un subconjunto de *R*.

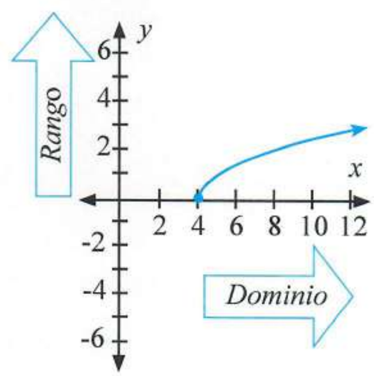
Función irracional

Evalúa la función $f(x) = \sqrt{x-4}$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-2	
0	
3	
4	
7	
9	
30	

Para que la función pueda ser evaluada, el radicando $x - 4$ debe ser ______________

Dom f = ____________



Rango f = ____________

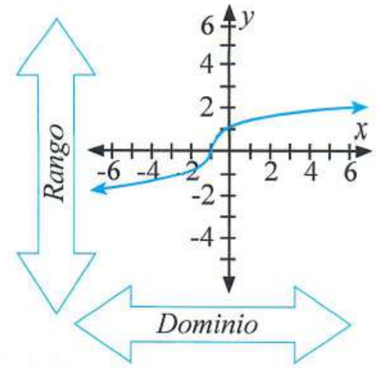
> En una **función irracional de índice par**, *Dom f* = {x | x haga el radicando no negativo}
> y *Rango f* es un subconjunto de *R*.

Evalúa la función $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-27	
-1	
0	
2	
5	
8	
1000	

¿Hay algún número real x para el cual no se puedan realizar las operaciones $\sqrt[3]{(\quad)+1}$? ____________________

Dom f = ____________



Rango f = ____________________

En una **función irracional de índice impar**, *Dom f* = *R* y *Rango f* = *R*.

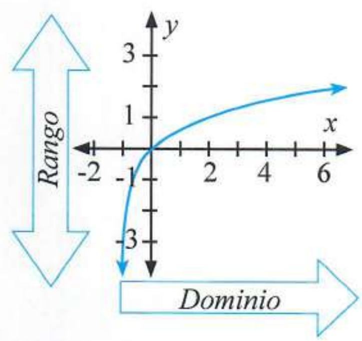
Función logarítmica

Evalúa la función $f(x) = \log_{10}(x+1)$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-5	
-2	
-1	
0	
3	
6	
200	

Para que la función pueda ser evaluada, el argumento del logaritmo "$x + 1$" debe ser ____________________

Dom f = ____________



Rango f = ____________________

En una **función logarítmica**
Dom f = {x | x haga que el argumento del logaritmo sea positivo} y *Rango f* = *R*.

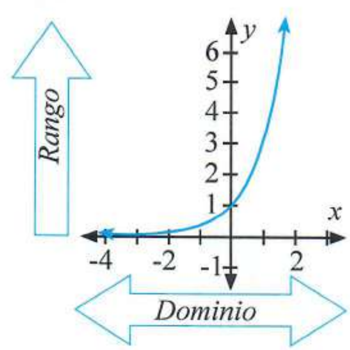
Función exponencial

Evalúa la función $f(x) = 3^x$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-6	
-5	
-3	
0	
1	
2	
3	
4	

¿Hay alguno o más números reales para los cuales no se puedan realizar lo potencia $3^{(\quad)}$? ____________________

Dom f = ____________



Rango f = ____________________

En una **función exponencial** *Dom f* = *R* y *Rango f* es un subconjunto de *R*.

Función trigonométrica

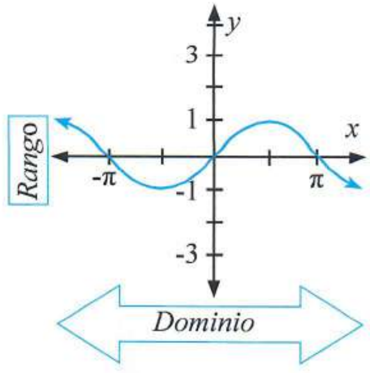
Evalúa la función $f(x) = \text{sen}\, x$ en los valores indicados.

x	$f(x)$
-3π	
-2π	
0	
$\pi/2$	
$\pi/3$	
π	
$2\pi/3$	

¿Hay alguno o más radianes para los cuales no se pueda calcular $f(x) = \text{sen}\, x$?

____

Dom f = ____________

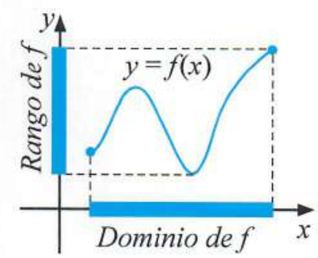


Rango f = __________________

En la **función trigonométrica seno**, $Dom\, f = R$ y $Rango\, f = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

En la actividad 1.2 se introdujo el concepto de dominio y de rango de una manera informal, siendo ambos conceptos importantes en la definición de una función, pues una vez que se tiene la expresión algebraica de la función, se debe precisar su dominio, y este a su vez, determina el rango de la misma.

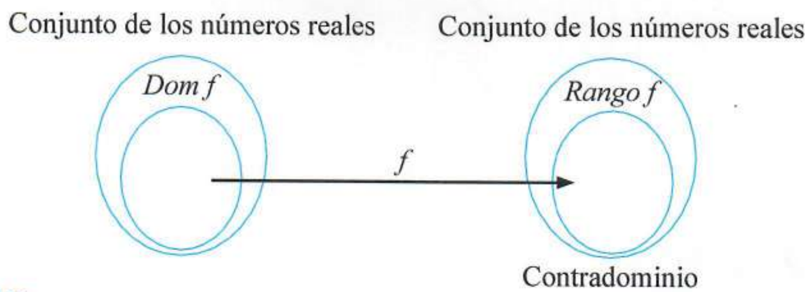
Es decir, mediante la fórmula de la función, a partir de un valor del dominio se asigna uno y solo un valor del rango.



El **dominio** de una función numérica f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

El **rango** de una función numérica f es el subconjunto de números reales que resulta de evaluar $f(x)$ para cada número real de su dominio.

En términos de conjuntos, la definición de dominio (*Dom f*) y rango (*Rango f*) de una función f, se representan como:

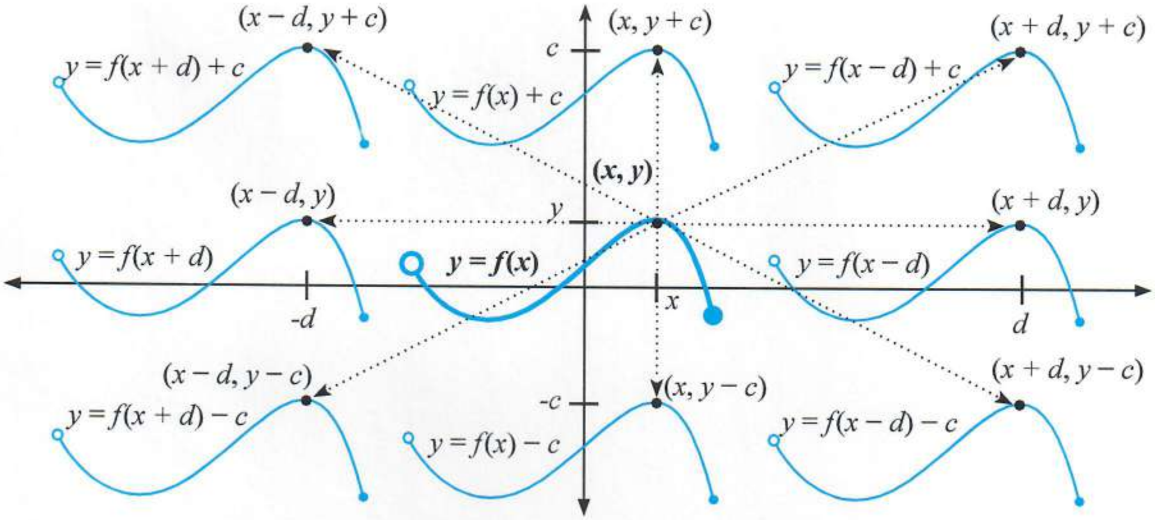


Ejemplos

1. Para la función $f(x) = x$, el dominio y rango son iguales al conjunto de los números reales.
2. Para la función $f(x) = x^2$, el dominio es igual al conjunto de los números reales, pero el rango es el subconjunto de los números reales no negativos.
3. Para la función $f(x) = \sqrt{x}$, el dominio y rango son el subconjunto de los números reales no negativos.

De los ejemplos, tanto el dominio como el rango de una función son subconjuntos del conjunto de los números reales. Además, el **contradominio** es igual al conjunto de los números reales, por lo que el rango es un subconjunto del contradominio. Se aclara que un conjunto es subconjunto de sí mismo, por aquello de que el dominio y/o el rango sean iguales al conjunto de los números reales.

Las **traslaciones** y **reflexiones** de una función, son de gran ayuda para gráficar una función a partir de otra, lo cual puede significar que cambie o no el dominio y/o rango de la función $y = f(x)$. A continuación, se muestran las gráficas que se obtienen de la función $y = f(x)$ al considerar las diferentes posibilidades de traslación.



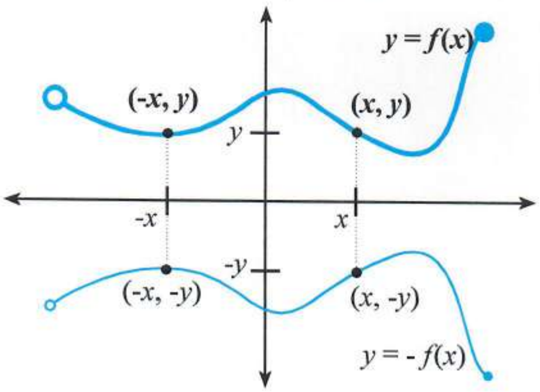
Analiza en qué casos cambia o no el dominio y rango de las funciones obtenidas ______________

____

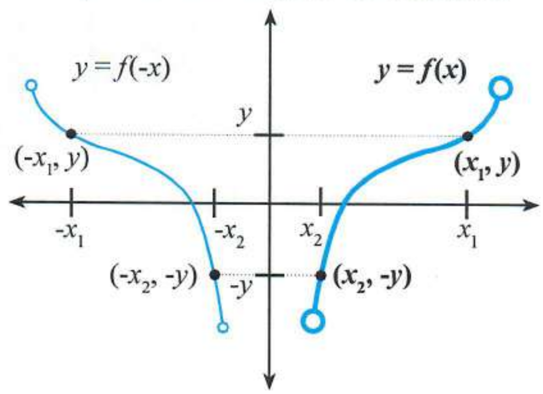
____

Aparte de las traslaciones, existen las reflexiones de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje de las ordenadas y de las abscisas.

Reflexión sobre el eje de las abscisas



Reflexión sobre el eje de las ordenadas



¿Qué se puede decir del dominio y rango de las funciones que se obtienen? ______________

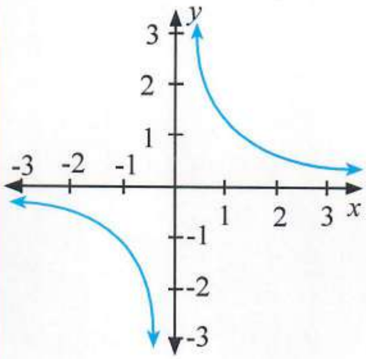
____.

Las traslaciones y reflexiones regularmente se aplican a funciones básicas, pero también se pueden aplicar a cualquier función. En la siguiente actividad aplica las traslaciones y reflexiones sobre la función básica indicada.

Actividad 1.3

Realiza las traslaciones y reflexiones indicadas, y determina su dominio y rango.

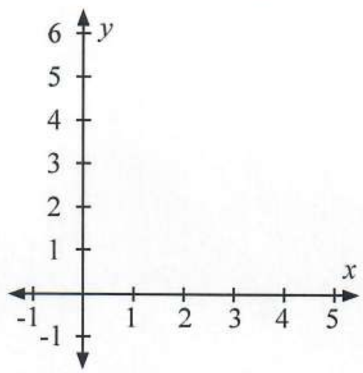
Gráfica básica: $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Dom f:________________

Rango f:________________

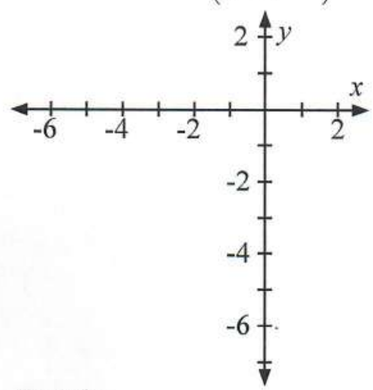
Gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 3$



Dom g:________________

Rango g:________________

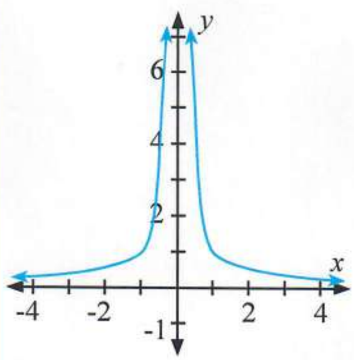
Gráfica de $h(x) = -\left(\dfrac{1}{x+3} + 1\right)$



Dom h:________________

Rango h:________________

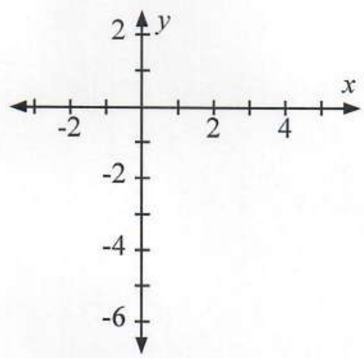
Gráfica básica: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



Dom f:________________

Rango f:________________

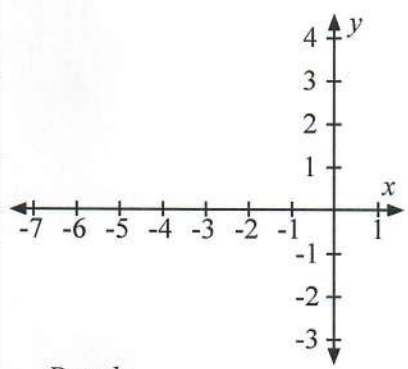
Gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - 4$



Dom g:________________

Rango g:________________

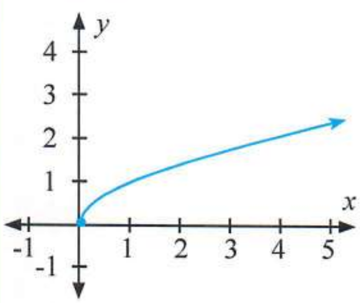
Gráfica de $h(x) = -\left(\dfrac{1}{(x+4)^2} - 3\right)$



Dom h:________________

Rango h:________________

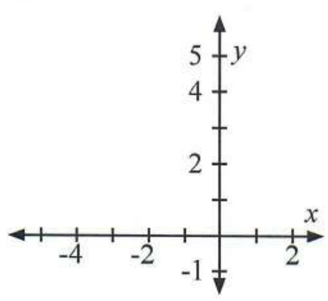
Gráfica básica: $f(x) = \sqrt{x}$



Dom f:________________

Rango f:________________

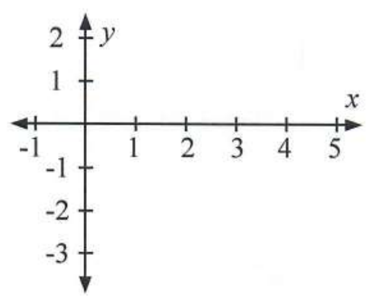
Gráfica de $g(x) = \sqrt{x+4} + 2$



Dom g:________________

Rango g:________________

Gráfica de $h(x) = -(\sqrt{x-1} - 1)$

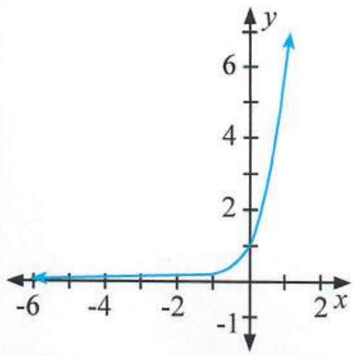


Dom h:________________

Rango h:________________

Unidad 1

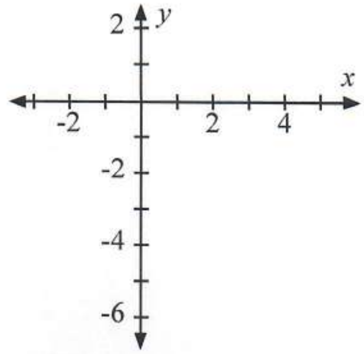
Gráfica básica: $f(x) = 5^x$



Dom f:________________

Rango f:________________

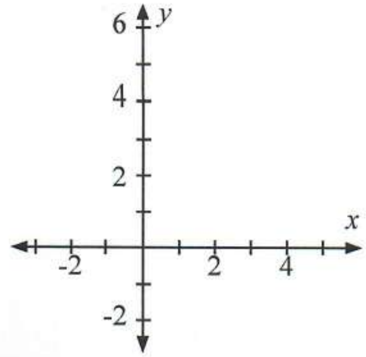
Gráfica de $g(x) = 5^{x-2} - 5$



Dom g:________________

Rango g:________________

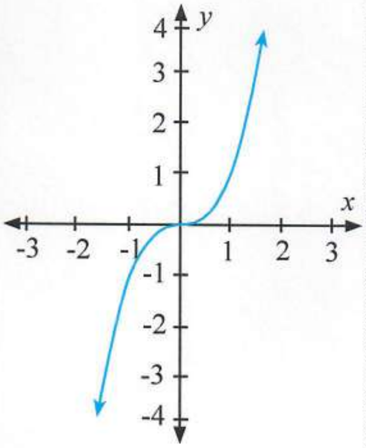
Gráfica de $h(x) = -(5^{x-2} - 5)$



Dom h:________________

Rango h:________________

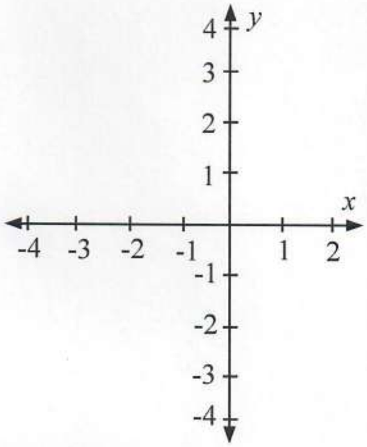
Gráfica básica: $f(x) = x^3$



Dom f:________________

Rango f:________________

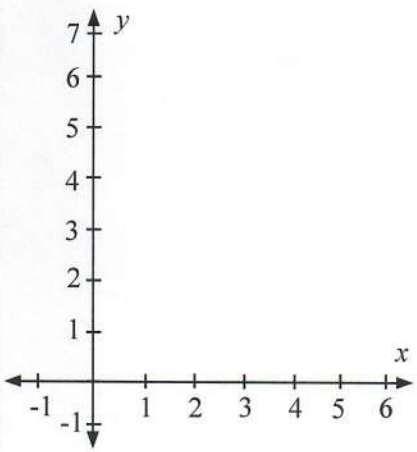
Gráfica de $g(x) = (x + 2)^3 - 1$



Dom g:________________

Rango g:________________

Gráfica de $h(x) = -((x - 3)^3 - 3)$



Dom h:________________

Rango h:________________

Para concluir el tema de funciones, en la siguiente tabla, escribe la fórmula de una función básica diferente para cada caso, que al aplicarle una traslación o reflexión, satisfaga las condiciones que se indican.

	Dominio		Rango	
	No cambia	Si cambia	No cambia	Si cambia
Traslación de	$f(x) = x$			
Reflexión de				$f(x) = e^x$

Ejercicios 1.2

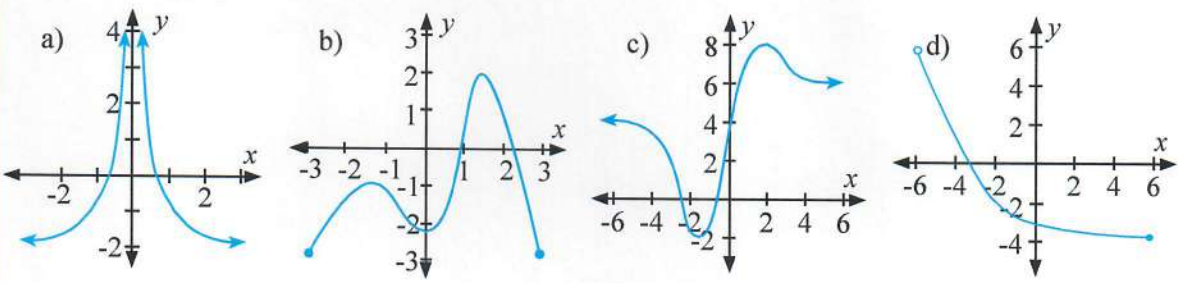
1. El conjunto de todos los valores en los que una función está definida se llama ____________, y el conjunto de las imágenes se llama ______________________ de la función.

2. ¿Con qué otros nombres se le conoce al rango de una función? ¿El rango y contradominio son necesariamente iguales? ¿Cuál es la diferencia entre imagen de un valor del dominio de f y conjunto imagen?

3. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$	b) $f(x) = \sqrt{x+1}$	c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$	d) $f(x) = \ln(x+1)$
e) $f(x) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x + 1$	f) $f(x) = \operatorname{sen} x$	g) $f(x) = \sec x$	h) $f(x) = \csc x$
i) $f(x) = \tan x$	j) $f(x) = \cot x$	k) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$	l) $f(x) = \arccos x$
m) $f(x) = \operatorname{arcsec} x$	n) $f(x) = \operatorname{arccsc} x$	ñ) $f(x) = \arctan x$	o) $f(x) = \operatorname{arccot} x$

4. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones representadas por las siguientes gráficas.



5. En la temporada de calor es muy común que se ocasionen incendios por el efecto lupa, por colillas de cigarros o producidos intencionalmente por el hombre. Al iniciar un incendio, este se propaga a mayor velocidad por las corrientes de aire. Al iniciarse un incendio en un momento que no hay corrientes de aire, este se propaga en forma de círculo. Su radio se incrementa a una razón de 0.5 metros por minuto.
   a) Determina la función del radio $r(t)$ de la circunferencia en función del tiempo.
   b) Determina la función para calcular el área $A(t)$ incendiada en función del radio de la circunferencia.
   c) Determina el dominio y rango de la función $A(t)$.

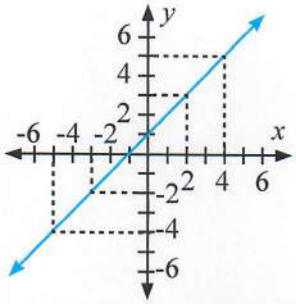
6. El volumen de una alberca que se vacía está dado por la función $v(t) = \dfrac{100\sqrt{t+1}}{t+1} - 35$, donde t es el tiempo de vaciado en horas y $v(t)$ es el volumen de agua en m^3.
   a) Determina el dominio y rango de la función $v(t)$ de acuerdo al contexto del problema.
   b) ¿Cuál es la capacidad de la alberca y cuánto tarda en vaciarse?

7. Una fábrica tiene la capacidad para producir desde 0 a 500 celulares por día. Si por día, los gastos generales ascienden a \$8 000 y el costo por producir un celular es de \$850. Determina una fórmula para $C(x)$, el costo total de producir x celulares en un día. ¿Cuál es su dominio y rango?

1.1.3 Función inyectiva y función inversa

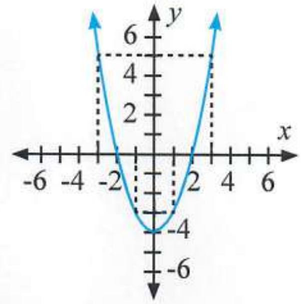
Como ya sabes, una función numérica define su dominio y en consecuencia su rango, además, de que los elementos del dominio estan relacionados con los elementos del rango mediante la regla de correpondencia $y = f(x)$. Dicha regla de correspondencia entre el dominio y el rango puede presentar situaciones como las siguientes:

Gráfica de $f(x) = x + 1$



$f(x) = x + 1$
$f(-5) = -4$
$f(-3) = -2$
$f(-1) = 0$
$f(0) = 1$
$f(2) = 3$
$f(4) = 5$

Gráfica de $f(x) = x^2 - 4$

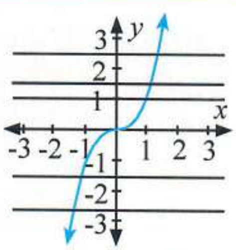


$f(x) = x^2 - 4$
$f(-1) = -3$
$f(1) = -3$
$f(-3) = 5$
$f(3) = 5$

Observa que en la representación gráfica de la función lineal $f(x) = x + 1$, no hay dos elementos del dominio que tengan una misma imagen, y en la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4$, sí hay pares de elementos del dominio que tienen una misma imagen. A las funciones en las que no hay dos o más elementos del dominio que tengan una misma imagen, se les llama **funciones uno a uno** o **inyectivas**. Para profundizar más sobre el tema, puedes indagar sobre las funciónes sobreyectivas y biyectivas.

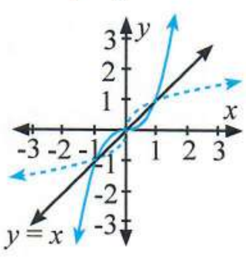
Definición de función uno a uno

Una función numérica es uno a uno si cada número real del rango de f está asociado con exactamente un número real en su dominio.



La función $f(x) = x^3$ es uno a uno, puedes verificarlo usando el graficador Desmos. También puedes trazar rectas horizontales sobre su representación gráfica, y si ninguna de estas la interseca más de una vez, se dice que la función es uno a uno, a esto se le conoce como la **prueba de la recta horizontal**.

Por otra parte, vimos la reflexión de una función sobre el eje de las abscisas y sobre el eje de las ordenadas, ahora, imagínate la reflexión de la función $f(x) = x^3$ sobre la recta $y = x$.



Observa que cada punto (x, y) de $f(x) = x^3$, se transforma en el punto (y, x) de la representación gráfica de su reflexión.

A la reflexión de una función uno a uno sobre la recta $y = x$ se le llama inversa de $f(x)$, y se donota como $f^{-1}(x)$. El -1 no es un exponente, pues la notación representa la inversa de una función y no a $\dfrac{1}{f(x)}$.

Definición de función inversa

Sea f función uno a uno, con dominio A y rango B. La inversa de f es la función f^{-1}, cuyo dominio es B y rango A, para los cuales

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \in B \quad y \quad f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \in A.$$

Ahora, ¿cuál es el procedimiento para determinar la ecuación de la función inversa de $f(x) = x^3$? Hacer $y = x^3$, luego despejar x para obtener $x = \sqrt[3]{y}$, intercambiar x e y para obtener $y = \sqrt[3]{x}$, por último, se redefine como $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Resumiendo, para **determinar la inversa de una función uno a uno**, realiza los siguientes pasos:

1. Escribe $y = f(x)$.
2. Despeja x de esta ecuación en términos de y para obtener $x = f(y)$.
3. Intercambia x e y. La ecuación resultante es la función inversa, en símbolos $y = f^{-1}(x)$.

Comprobemos mediante la definición de función inversa, que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de $f(x) = x^3$. Observa que para esta función el dominio y rango tanto de f como de f^{-1} es R.

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \;\text{ y }\; f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

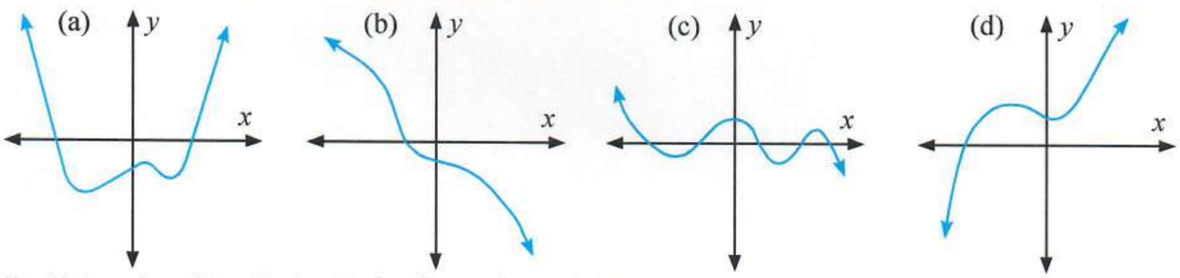
Por lo tanto f^{-1} es la función inversa de f.

Las funciones inversas tienen las siguientes propiedades:

1. *Dom* f^{-1} = *Rango* f
2. *Rango* f^{-1} = *Dom* f
3. La inversa de f^{-1} es f, esto es $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ejercicios 1.3

1. Una función es uno a uno si ______________________________
2. ¿Las funciones polinomiales de grado par son uno a uno? ____________________
3. Una función tiene inversa si es ______________________________
4. ¿En qué consiste la prueba de la recta horizontal? ____________________
5. ¿Cuáles de las siguientes representanciones gráficas tienen inversa?



6. Determina si las siguientes funciones tienen inversa, y si la tienen, halla su ecuación, dominio y rango.

   a) $f(x) = 5x + 6$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ d) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ e) $f(x) = 16 - x^2$

7. La función cuadrática $f(x) = x^2 + 5$ no es uno a uno en su dominio natural, restríngelo de tal forma que se pueda determinar la inversa.
8. La función $f(x) = x^3$ tiene inversa, y la función $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$, ¿tiene inversa?
9. En la función lineal $f(x) = mx + b$, ¿para qué valores de m la función tiene inversa?
10. Pizzas Leo vende la pizza grande en \$199 más \$10 por cada aderezo. Si un cliente ordena una pizza grande con x aderezos, el costo está dado por la función $f(x) = 199 + 10x$. Determina f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

1.2 Límites

Propósito

Cálcula límites de funciones algebraicas y trascendentes, aplicando métodos gráficos, numéricos o analíticos.

El concepto central en este tema, es "límite", que se utiliza para estudiar el comportamiento de las funciones en un punto o en el infinito. Como **antecedente**, para el estudio de los límites, del tema de funciones se necesitan los conceptos de dominio y rango de una función, así como, graficar y explorar su comportamiento. De *Matemáticas I*, las operaciones con polinomios, la factorización y la simplificación de fracciones algebraicas. De *Matemáticas II*, la racionalización de denominadores. De *Matemáticas III*, las funciones e identidades trigonométricas. Y de *Matemáticas IV*, las operaciones y composición de funciones.

Recuerda que en el tema de las funciones, para determinar el valor de la imagen $f(x)$ solo se necesita tener el valor x del dominio de la función. Pero, ¿qué pasa si la representación gráfica de la función tiene agujeros o saltos? ¿Qué pasa si la función crece o decrece al infinito u oscila constantemente? ¿Qué pasa si la función no está definida en un valor x en particular? ¿Qué significa "indefinido" para diferentes funciones en diferentes puntos? Para describir el comportamiento de las funciones y especialmente para las que presentan este tipo de casos en determinados valores de x, es que se utiliza el concepto de límite.

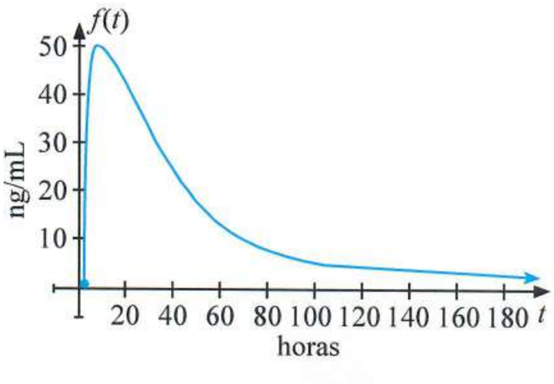
Los graficadores como: Desmos, Geogebra, WolframAlpha y Mathematics, permiten visualizar una función para explorar su comportamiento, a través de gráficas o tablas de valores. Sin embargo, hay casos en los que se debe tabular y graficar una función a lápiz y papel. Lo mismo aplica para los motores de cálculo como Mathway, MathMal, Photomath y WolframAlpha, en los que se pueden realizar cálculos algebraicos.

1.2.1 Definición de límite

En la vida cotidiana expresamos frases como estamos al límite de nuestra fuerza o estoy llegando al límite de mi paciencia, y expresiones como estas reflejan que estamos acercándonos al final de algo. Ahora, veamos en términos matemáticos el concepto de límite.

El ser humano depende del suministro de compuestos químicos (medicamentos) para curar, prevenir o controlar enfermedades. Los medicamentos de alguna u otra forma llegan al torrente sanguíneo, una vez ahí, se distribuyen en el organismo mediante el proceso LADME, que consta de la liberación, absorción, distribución, metabolismo y excreción.

En el caso particular de un deportista, es importante conocer el tiempo que tarda el organismo en desechar un fármaco, y qué cantidad de este permanece en el torrente sanguíneo o en la orina. Esto como consecuencia de que en una justa deportiva, constantemente debe realizarse pruebas *antidoping*.



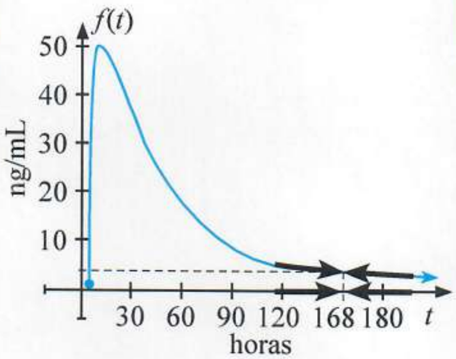
Suponga que a través de la función $f(t) = \dfrac{100t}{t^2+1}$, para $t \geq 1$, se puede estimar la concentración en nanogramos por mililitros (ng/mL) de tetrahidrocannabinol en la orina, t horas después de haber sido tomado. En la gráfica se observa que, al pasar el tiempo, la concentración del fármaco en la orina tiende a cero, debido al proceso natural del cuerpo para desecharlo.

Continuando con el ejemplo del deportista, si en una situación debe decidir si toma o no el fármaco en un momento dado, debido a que en una semana se hará la prueba antidoping de orina. Es decir, la muestra de orina la debe recolectar antes de que se cumplan las 168 horas, de hacerlo después, no le vale el resultado debido a las normas con las que se rigen los deportistas. Infiere que debería recolectar la muestra lo más próximo a las 168 horas, y así, la concentración del fármaco sería la menor posible.

Estudios anteriores refieren un comportamiento de este fármaco por lo que hace dos tablas para acercarse a las 168 horas por la izquierda (inicia a las 167 horas con 58 minutos) y por la derecha (inicia a las 168 horas con 2 minutos). Para facilitar los cálculos, los minutos los convierte a décimas de hora.

Al aproximarse a las 168 horas por la izquierda	
t	$f(t)$
167.97	0.59532
167.98	0.595288
167.99	0.595252
167.999	0.595221
167.9999	0.5952174
167.99999	0.59521704
167.999999	0.595217009

La concentración del fármaco en la orina es de 0.595217 ng/mL



Al aproximarse a las 168 horas por la derecha	
t	$f(t)$
168.03	0.59511
168.02	0.595146
168.01	0.595182
168.001	0.595213
168.0001	0.5952167
168.00001	0.59521697
168.000001	0.595217003

La concentración del fármaco en la orina es de 0.595217 ng/mL

Los valores a los que se aproxima la concentración del fármaco en la orina, cuando el número de horas transcurridas se aproxima a 168 horas por la izquierda y por la derecha, se les conoce como **límites laterales**.

Al ver el comportamiento de los valores en las tablas, el deportista se da cuenta de que por más que se aproxime a las 168 horas, tanto por la izquierda como por la derecha, la concentración de tetrahidrocannabinol en la orina se aproxima a 0.595217 ng/mL. Por otra parte, el equipo clínico con el que se realizan las pruebas aproxima hasta dos decimales (centésimas). Si quiere obtener un resultado menor a 0.6 ng/mL, ¿debe o no tomar el fármaco?__________ ¿por qué?______________________

____

____

____

El ejemplo anterior es un antecedente para la noción intuitiva de límite. Recuerda que, cuando t se acerca a las 168 horas por la izquierda y por la derecha, el valor de la concentración de tetrahidrocannabinol en la orina es de 0.595217 ng/mL, que en términos matemáticos se refiere a que "el límite de $f(t)$ cuando t se aproxima a 168, es 0.595217" y se denota

$$\lim_{t \to 168} \frac{100t}{t^2+1} = 0.5952171.$$

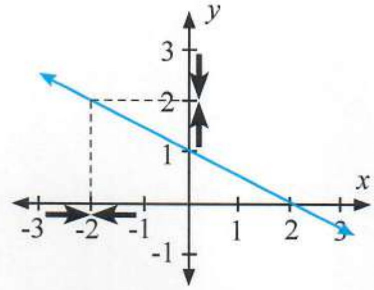
Para comprender la importancia del límite, a continuación se presentan tres ejemplos en un contexto matemático, mediante los cuales se dará un mayor sentido a la noción intuitiva de límite.

Ejemplo 1

En la función $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a -2, ¿a qué valor se aproxima $f(x)$?

x	$f(x)$
-2.1	2.05
-2.01	2.005
-2.001	2.0005
-2.0001	2.00005
-2.00001	2.0000005

Cuando x se aproxima a -2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 2.



Cuando x se aproxima a -2, $f(x)$ se aproxima a 2.

x	$f(x)$
-1.9	1.95
-1.99	1.995
-1.999	1.9995
-1.9999	1.99995
-1.99999	1.999995

Cuando x se aproxima a -2 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 2.

Cuando x se aproxima a -2 tanto por la izquierda como por la derecha, el valor al que se aproxima $f(x)$ coincide con el valor de la función $f(-2) = 2$.

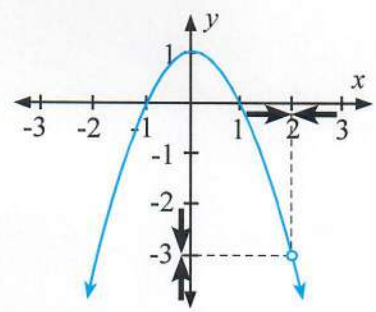
Es decir, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a -2 , es 2. Y se denota como $\lim\limits_{x \to 2}\left(-\frac{x}{2} + 1\right) = 2$.

Ejemplo 2

En la función $g(x) = -\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a 2, ¿a qué valor se aproxima $g(x)$?

x	$g(x)$
1.9	-2.61
1.99	-2.9601
1.999	-2.996001
1.9999	-2.99960001
1.99999	-2.9999600001

Cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a -3.



Cuando x se aproxima a 2, $g(x)$ se aproxima a -3.

x	$g(x)$
2.1	-3.41
2.01	-3.0401
2.001	-3.004001
2.0001	-3.00040001
2.00001	-3.0000400001

Cuando x se aproxima a 2 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a -3.

En este ejemplo, $g(2)$ no esta definida (tiene un **hueco** en $x = 2$), sin embargo, cuando x se aproxima a 2 tanto por la izquierda como por la derecha, $g(x)$ se aproxima a -3. Es decir, el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 2, es -3.

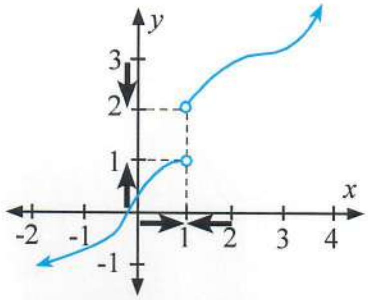
Y se denota como $\lim\limits_{x \to -2}\left(-\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}\right) = -3$.

Ejemplo 3

En la función $h(x) = \begin{cases} -(-x+1)^3+1, & x<1 \\ (x-2)^3+3, & x>1 \end{cases}$, si x se aproxima por la izquierda y por la derecha a 1, ¿a qué valor se aproxima $h(x)$?

x	$h(x)$
0.9	0.999
0.99	0.999999
0.999	0.999999999
0.9999	0.999999999999

Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $h(x)$ se aproxima a 1.



Cuando x se aproxima a 1, $h(x)$ no se aproxima a ningún valor.

x	$h(x)$
1.1	2.271
1.01	2.029701
1.001	2.002997001
1.0001	2.000299970001

Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $h(x)$ se aproxima a 2.

En este ejemplo, $h(1)$ no esta definida (tiene un **salto finito** en $x = 1$), además, cuando x se aproxima a 1 tanto por la izquierda como por la derecha, $h(x)$ no se aproxima a un mismo valor.

Se presentaron tres ejemplos de funciones en las que x se aproxima a un valor dado, pero, ¿en cuáles situaciones la función se aproxima a un mismo valor?____________________

¿En cuál no? ____________________ ¿Por qué?____________________

____

En los tres ejemplos, x puede aproximarse por la izquierda y por la derecha a c. Ahora, si $f(c)$ está definida como en el ejemplo 1, es obvio que $f(x)$ se aproxima a $f(c)$. Y si la función no está definida en $x = c$, es decir, la representación gráfica tiene un hueco o un salto finito (ver ejemplo 2 y 3, el caso de los saltos infinitos lo veremos más adelante), entonces, ¿a qué valor se aproxima la función?

Es aquí donde el límite toma relevancia para estudiar la variación de la función en puntos donde no está definida o en los que no se sabe con exactitud hacia que valor se aproxima. Con este antecedente, se tienen las condiciones para establecer la **noción intuitiva de límite**.

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de c, pero diferente a este, tanto por la izquierda como por la derecha de c, entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L.

Su notación es: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

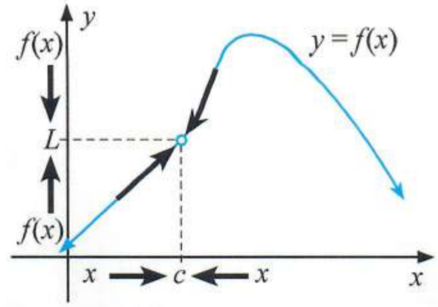
Se lee "$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a c"

Ejercicios 1.4

1. Si el $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, significa que $f(x)$ ________________ L cuando x ________________ c.
2. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima tanto por la izquierda como por la derecha a c, ¿implica que $f(c) = L$?
3. Si al aproximarse x a c por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a L, y al aproximarse x a c por la derecha, $f(x)$ se aproxima a M, ¿qué se puede decir sobre $\lim\limits_{x \to c} f(x)$?
4. ¿Cuándo cobra importancia el cálculo del límite en un punto de una función?

1.2.2 Cálculo de límites por medio de métodos gráficos y numéricos

Al calcular el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to c$, puede que este exista o no, más aún, el límite puede existir y la función no estar definida en c. Por lo que, para explorar el comportamiento de la función en el límite, en esta sección se hará mediante métodos gráficos y numéricos, aplicando los límites laterales (aproximarse por la izquierda y por la derecha). Se aclara que, hay casos en los que sólo existe uno de los límites laterales, por ejemplo, si se trata del límite de una función cuando x crece indefinidamente, es decir $x \to +\infty$.



Límite por la izquierda $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$

Si los límites laterales L y M son iguales, es decir,

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

entonces el límite existe

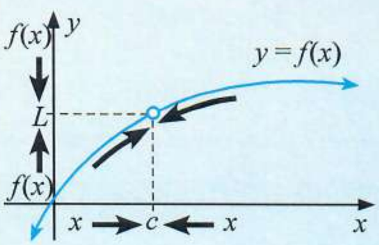
$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Límite por la derecha $\lim_{x\to c^+} f(x) = M$

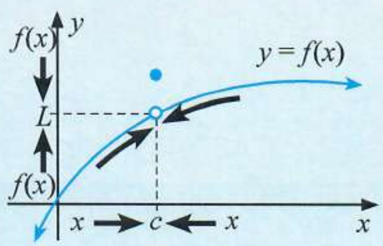
La existencia del límite implica unicidad, es decir, **si el límite $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, es único** (su demostración requiere de la definición formal de límite, por lo que se deja para cursos avanzados de cálculo). Por otra parte, en la noción intuitiva de límite, $f(c)$ no necesita estar definida para que el límite exista, es suficiente con que $f(x)$ este definida para un valor x cerca de c. Es decir, el límite está asociado con el comportamiento de la función cuando x está cerca de c, pero no necesariamente en c. Para aclarar lo anterior, realiza las siguientes actividades.

Actividad 1.4

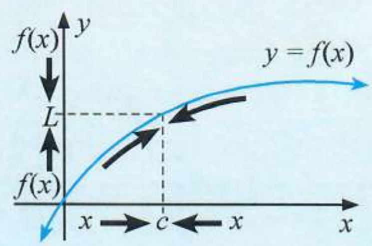
Situación 1. Cuando x se aproxima a c, si los límites laterales son iguales el límite de $f(x)$ existe, esté o no definida $f(c)$.



$f(c)$ no está definida
Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L



$f(c)$ está definida
Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L
$f(c) \neq L$

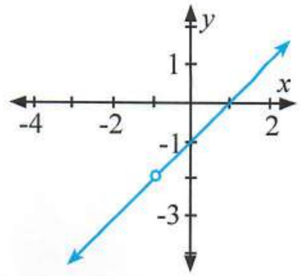


$f(c)$ está definida. Los límites laterales son iguales
El límite existe y es L
$f(c) = L$

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ no está definida para $x = -1$, calcula el $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

x	$f(x)$
-1.1	
-1.01	
-1.001	
-1.0001	
-1.00001	

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$ ______



$\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$ ______

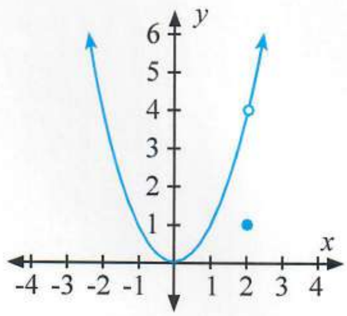
x	$f(x)$
-0.9	
-0.99	
-0.999	
-0.9999	
-0.99999	

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) =$ ______

Ahora calcula el límite de $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$, cuando $x \to 2$.

x	$g(x)$
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	
1.99999	

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) =$ ______



$\lim\limits_{x \to 2} g(x) =$ ______

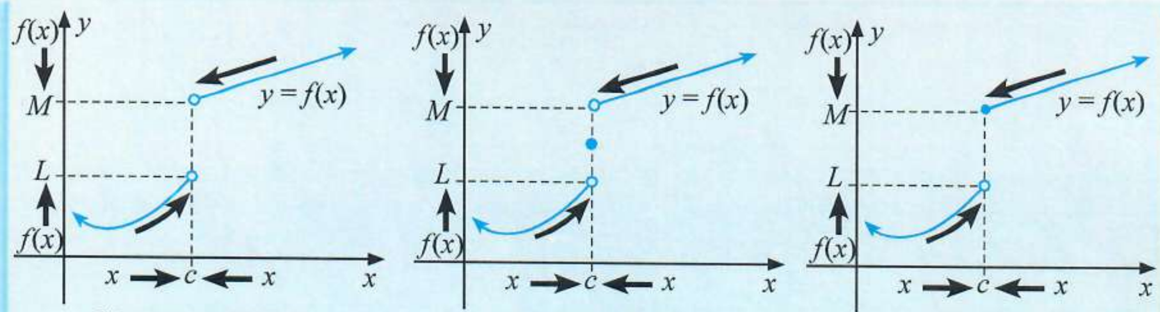
x	$g(x)$
2.1	
2.01	
2.001	
2.0001	
2.00001	

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) =$ ______

Como conclusión, si los límites laterales son ____________ el límite $\lim\limits_{x \to c} h(x)$ ________ esté o no ____________ $h(c)$.

Actividad 1.5

Situación 2. Cuando x se aproxima a c, si los límites laterales son diferentes el límite de $f(x)$ no existe, esté o no definida $f(c)$.



$f(c)$ no está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe

$f(c)$ está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe

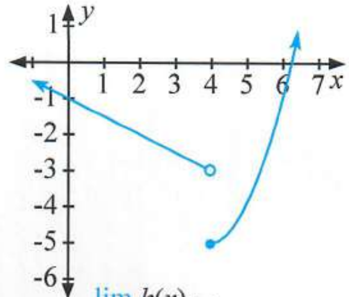
$f(c)$ está definida
Los límites laterales son diferentes
El límite no existe

Unidad 1

Calcula el $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$ de la función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1, & x < 4 \\ x^2 - 8x + 11, & x \geq 4 \end{cases}$.

x	$h(x)$
3.9	
3.99	
3.999	
3.9999	
3.99999	

$\lim\limits_{x\to 4^-} h(x) =$ ______



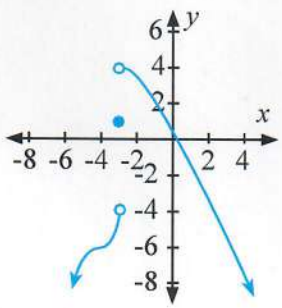
$\lim\limits_{x\to 4} h(x) =$ ______

x	$h(x)$
4.1	
4.01	
4.001	
4.0001	
4.00001	

$\lim\limits_{x\to 4^+} h(x) =$ ______

Calcula el $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ de la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^3 - 5, & x < -3 \\ -(x+3)^3 + 4, & x > -3 \\ 1, & x = -3 \end{cases}$.

x	$f(x)$
-3.1	
-3.01	
-3.001	
-3.0001	
-3.00001	



x	$f(x)$
-2.9	
-2.99	
-2.999	
-2.9999	
-2.99999	

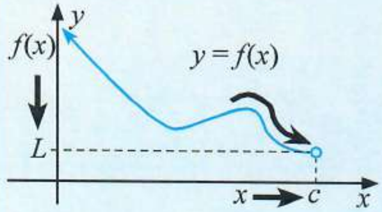
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$ ______ $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ ______ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$ ______

Como conclusión, si los límites laterales son ____________, el $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ no __________ esté o no ____________ $g(c)$.

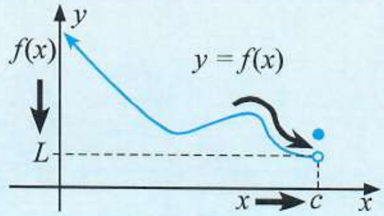
Actividad 1.6

Situación 3. Cuando en la proximidad a un punto solo existe uno de los límites laterales de la función (más adelante se ve el caso de las asíntotas). En esta situación hay dos casos:

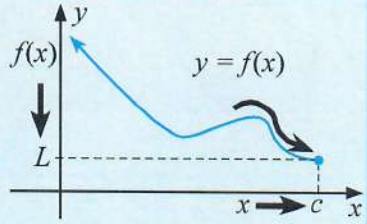
1. En el caso de que solo existe el límite por la izquierda.



$f(c)$ no está definida
El límite por la izquierda es L
El límite no existe

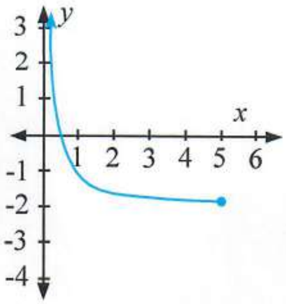


$f(c)$ está definida
El límite por la izquierda es L
El límite no existe



$f(c)$ está definida
El límite por la izquierda es L
El límite no existe

Calcula el $\lim\limits_{x \to 5} h(x)$ si $h(x) = \dfrac{1}{x} - 2$, para $0 < x \leq 5$.



x	$h(x)$
4.99	
4.999	
4.9999	
4.99999	
4.999999	

$\lim\limits_{x \to 5^-} h(x) =$ ______

¿Se puede calcular el $\lim\limits_{x \to 5^+} h(x)$?

____

¿Por qué?______________________

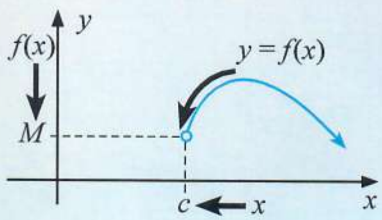
____

____

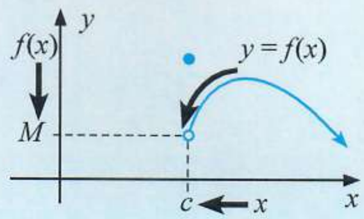
En consecuencia, ¿existe el $\lim\limits_{x \to 5} h(x)$? ________________

Como conclusión, si solo __________ el límite por la izquierda, el $\lim\limits_{x \to c} h(x)$ no __________ esté o no ____________ $h(c)$.

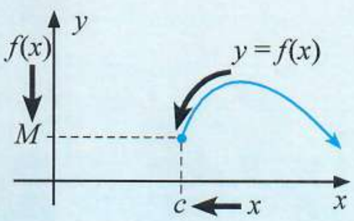
2. En el caso de que solo existe el límite por la derecha.



$f(c)$ no está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe

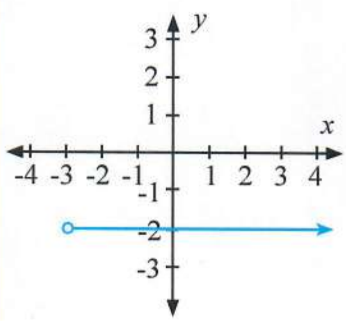


$f(c)$ está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe



$f(c)$ está definida
El límite por la derecha es M
El límite no existe

Calcula el $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ si $g(x) = -2$, para $x > -3$.



x	$g(x)$
-2.9	
-2.99	
-2.999	
-2.9999	
-2.99999	

$\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) =$ ______

¿Se puede calcular el $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x)$?

____

¿Por qué?______________________

____

____

En consecuencia, ¿existe el $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$? ________________

Como conclusión, si solo __________ el límite por la derecha, el $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ no __________ esté o no ____________ $g(c)$.

De la situación 3, se puede concluir que, si solo ______________________ uno de los límites ___________, entonces el límite ______________________________________ .

Ejercicios 1.5

Unidad 1

1. Si el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$_____ L, entonces el $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ _____ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

   Si el $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$____ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ _____ L.

2. Si solo existe uno de los límites laterales, entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ______________.

   Si $f(x)$ presenta un salto finito en $x = c$, entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ______________.

   Si $f(x)$ presenta un hueco en $x = c$, entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ______________.

3. ¿Si el $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ implica que $f(c)$ está definida? ¿Si $f(c)$ está definida implica que el $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$?

4. Sea g una función definida por $g(x) = 1$, para $x = 3$, calcula $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ si es que existe.

5. Traza la gráfica que represente a una función que satisfaga las siguientes condiciones:

   a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -2$; $f(1) = 2$

   b) $\lim\limits_{x\to -2} h(x) = 4$; $h(-2) = 6$; $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ no exista; $h(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to 4^-} h(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to 4^+} h(x)$ no exista.

6. A partir de la siguiente gráfica que representa a $f(x)$, si existe, determina:

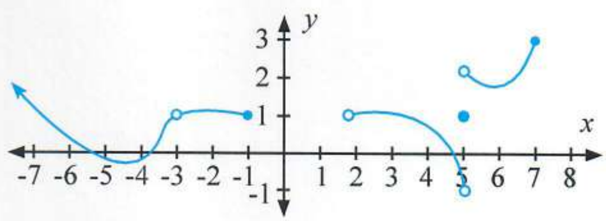
   a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

   d) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)$

   e) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)$



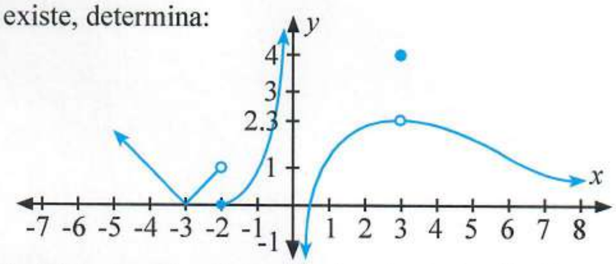
7. Dado el gráfico de $g(x)$, si existe, determina:

   a) $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

   d) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$



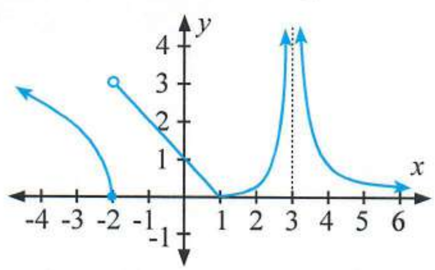
8. Dado el gráfico de la función $h(x)$, si existe, determine los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$

   c) $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)$

   d) $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$



9. Usa una tabla de valores para estimar los siguientes límites, si existen. Luego usa un graficador para confirmar los resultados.

   a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

g) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{e^{x+3}-1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ l) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{6\sqrt{x-2}}{x^2-9}\right)$

1.2.3 Cálculo analítico de límites

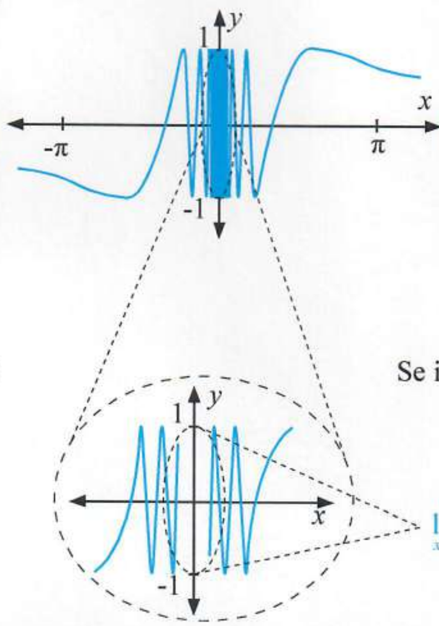
El cálculo del límite de una función en un punto, mediante la representación gráfica y tablas de valores para observar su comportamiento cerca de dicho punto, son herramientas visuales que en ocasiones pueden no dar evidencia clara del comportamiento de la función en las cercanías del punto.

Veamos el caso del $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Límite por la izquierda

x	$f(x)$
-0.0079	-0.966778
-0.00885	-0.017748
-0.0000004	-0.0000000001

Se infiere que el $\lim\limits_{x\to 0^-}\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\overset{?}{=}0$



$\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\overset{?}{=}0$

Límite por la derecha

x	$f(x)$
0.0079	0.966778
0.00885	0.017748
0.0000004	0.0000000001

Se infiere que $\lim\limits_{x\to 0^+}\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\overset{?}{=}0$

Es este caso, la representación gráfica no da información contundente sobre el comportamiento de

$$f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\text{ cuando } x\to 0.$$

Respecto a las tablas de valores, según se elija x cerca de 0, este puede engañar sobre el comportamiento de $f(x)=\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ cuando $x\to 0$, como se muestra en las tablas, por lo que se sugiere usar un graficador y aplicar la herramienta zoom. Esto nos lleva a tener cuidado en la elección de los valores de x cerca de 0, porque se puede cometer algún error. Para evitar lo anterior se recomienda calcular el límite con métodos analíticos.

Para el cálculo del límite de una función en un punto mediante métodos analíticos, se usan propiedades que se aplican tanto para las funciones algebraicas como trascendentes, así como estrategias definidas cuando se presentan indeterminaciones como $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ (no representan un valor numérico). Para el uso de dichas propiedades, las funciones deben satisfacer las condiciones que se mencionan a continuación.

Propiedades de los límites

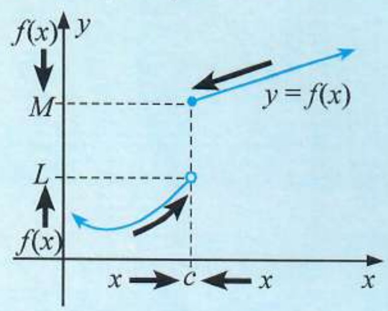
Sean n un entero positivo, k una constante real y f y g funciones que tengan límite en el número real c, entonces:

1. $\lim_{x\to c} k = k$;
2. $\lim_{x\to c} x = c$;
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$;
4. $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$;
5. $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$;
6. $\lim_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$;
7. $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$;
8. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

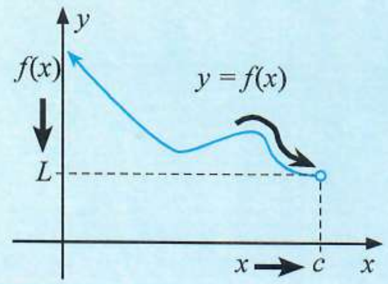
Antes de aplicar las propiedades anteriores, se debe tener en cuenta el siguiente resumen de los tipos comunes del comportamiento de $f(x)$ asociados a la no existencia del $\lim_{x\to c} f(x)$.

Tipos de comportamientos de $f(x)$ asociados a la no existencia del $\lim_{x\to c} f(x)$

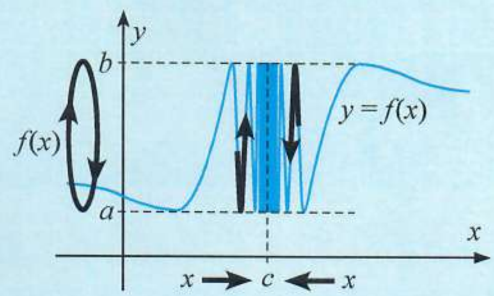
1. Si $f(x)$ se aproxima a un número diferente cuando $x\to c^-$, del que cuando $x\to c^+$.



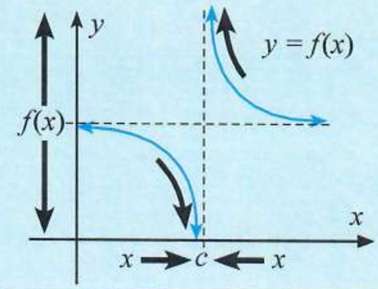
2. Si no hay valores proximos a c por la izquierda y/o derecha.



3. Si $f(x)$ oscila entre dos valores fijos cuando $x\to c$.

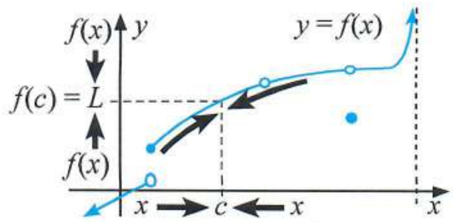


4. Si $f(x)$ crece o decrece sin límite a medida que $x\to c$.



Algunos límites se calculan por **sustitución directa**, sin embargo, hay otros que requieren de técnicas o artificios algebraicos como **factorización**, **racionalización** o **multiplicación por 1** (multiplicar una expresión por otra conveniente equivalente a 1, para simplificar una expresión).

Cálculo de límites por sustitución directa



Este método consiste en aplicar directamente las propiedades de los límites para calcular $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, siempre y cuando $f(x)$ no presente irregularidades en c asociados a la no existencia del límite.

En los siguientes ejemplos se aplican las propiedades de los límites. En el ejemplo 4 se justifica cada paso con dichas propiedades, y para los ejemplos del 5 al 8 se obvian para calcularlo directamente evaluando $f(c)$, por último, se simplifica el resultado.

Ejemplo 4

Calcula el $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1)$.

Resolución:

Propiedad de suma y resta	$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} 2x - \lim\limits_{x \to 1} 1$
Propiedad del múltiplo	$= \lim\limits_{x \to 1} x^2 + 2 \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1$
Propiedad de la potencia	$= \left(\lim\limits_{x \to 1} x\right)^2 + 2 \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1$
Propiedad de una constante	$= \left(\lim\limits_{x \to 1} x\right)^2 + 2 \lim\limits_{x \to 1} x - 1$
Propiedad de sustitución directa	$= (1)^2 + 2(1) - 1$
Simplifica	$= 2$

Ejemplo 5

Calcula el $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x$.

Resolución:

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Ejemplo 6

Calcula el $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 2^x}{\sqrt{x}}$.

Resolución:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} + 2^x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4} + 2^4}{\sqrt{4}} = 9$$

Ejemplo 7

Calcula el $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x + 2}$.

Resolución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x + 2} = \frac{2^2}{2 + 2} = 1$$

Ejemplo 8

Calcula el $\lim\limits_{x \to 1} (\log x + e^x)$.

Resolución:

$$\lim_{x \to 1} (\log x + e^x) = \log 1 + e^1 = e$$

Ejercicios 1.6

1. Calcula los siguientes límites por sustitución directa.

a) $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(4x^2 + 2x + \dfrac{1}{3}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -5} \sqrt{-1 - x}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 9}{x - 4}$

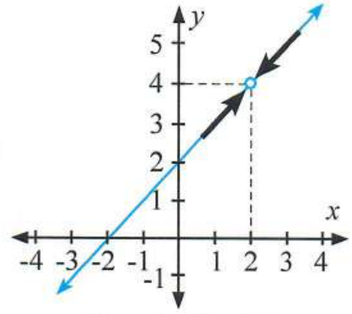
e) $\lim\limits_{t \to 4} \sqrt{5t^3 - 10t + 9}$ f) $\lim\limits_{s \to 2} (s - 2)\left(\dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$ g) $\lim\limits_{r \to 3} (4 - r)\sqrt[3]{30 - r}$ h) $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{e^w + 2}{w - 1}$

i) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{2}}$ j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3x^2-a}{x+a}$ k) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{3x+1}{\sqrt{2-x}}$ l) $\lim\limits_{t\to 0} (5t+4)^3$

m) $\lim\limits_{x\to -1} (5^x+2x)$ n) $\lim\limits_{r\to e} (3\ln r + r)$ ñ) $\lim\limits_{x\to -6} \left(\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{-6+x}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to -5} \sqrt[3]{\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right)^2}$

Cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$

El cálculo del $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ por sustitución directa es fácil de implementar, así que apliquémoslo una vez más para calcular el límite cuando $x\to 2$ de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.



Dom f = *R* - {2}

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

¿Qué significa $\frac{0}{0}$? **No representa ningún valor** y se le conoce como una indeterminación. ¿Por qué indeterminación? Viéndolo desde las operaciones de la aritmética, se puede dar respuesta de la siguiente manera:

¿Qué número multiplicado por cero es igual a cero? En símbolos (0)( ) = 0.

Todo número real satisface dicha condición, por lo que hay una infinidad de números, por eso se le llama indeterminación. Ahora, cuando se presente una indeterminación en el cálculo de un límite, se sugiere implementar la siguiente estrategia.

Estrategia para calcular límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$

1. Si la sustitución directa falla, continúa con el siguiente paso;
2. Prueba por factorización algebraica, para ello observa factores comunes que se puedan cancelar, para obtener una función equivalente (con el dominio restringido de la función original) y luego usar sustitución directa;
3. Racionaliza la función multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión a cancelar, para obtener una función equivalente (con el dominio restringido de la función original) y luego usar sustitución directa;
4. Si hay funciones trigonométricas, usa identidades o multiplica por una expresión equivalente a 1 para cambiar la función a otra equivalente con el dominio restringido de la función original y luego usar sustitución directa;
5. Si las técnicas anteriores fallan, prueba con métodos gráficos y numéricos.

Cálculo de límites por factorización

Una vez comprobado que falla la sustitución directa en el cálculo del $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, de acuerdo con la estrategia para calcular **límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$**, una opción es **factorizar** el numerador y/o denominador de $f(x)$, luego, identificar los factores que son ceros (factores que al evaluarlos en $x=c$ se hacen cero), y por último, simplificar y obtener el límite.

Ejemplo 9

Calcula el $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

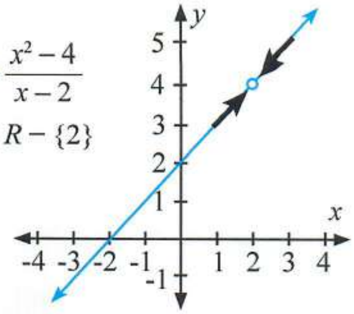
Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Dom f: $R - \{2\}$



Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

Factorizar diferencia de cuadrados

$x-2$ es un factor cero porque $2-2=0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$x-2$ es un factor cero porque $2-2=0$

En el ejemplo 9, mediante el proceso de factorización y simplificación se llega a que la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$ con *Dom f* $= R - \{2\}$. A continuación se muestra el efecto de la factorización en el cálculo del límite.

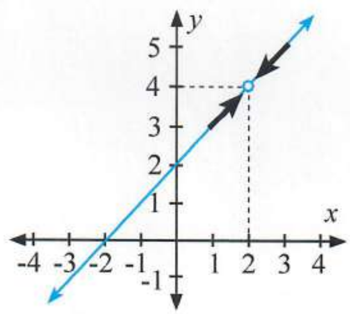
Por sustitución directa

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{0}{0}$

Dom f $= R - \{2\}$

Factorizar y simplicar



f hereda su dominio a *g* para que sean equivalentes

Aplicando factorización

$g(x) = x+2$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

Dom g $= R - \{2\}$

Si realizas las gráficas de f y g, observa que las representaciones gráficas son equivalentes salvo en el punto (2, 4). Para que f y g sean equivalentes, g se restringe al dominio de f, y así se tiene la igualdad $f(x) = x+2$ con *Dom f* $= R - \{2\}$, la cual no presenta una indeterminación en $x = 2$, solo no está definida, pero eso no afecta el cálculo del límite, por lo que se puede calcular el límite por sustitución directa.

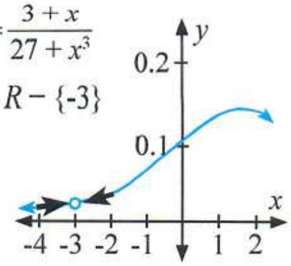
En resumen, al aplicar un método algebraico, se obtiene una función equivalente salvo en un punto, a la que se le pueda calcular el límite por sustitución directa.

Ejemplo 10

Calcula el $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3+x}{27+x^3}$.

$f(x) = \dfrac{3+x}{27+x^3}$

Dom f: $R - \{-3\}$



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to -3} \frac{3+x}{27+x^3} = \frac{3+(-3)}{27+(-3)^3} = \frac{0}{0}$$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$3+x$ es un factor cero porque $3+(-3)=0$

$$\lim_{x \to -3} \frac{3+x}{27+x^3} = \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(3+x)}(9-3x+x^2)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{9-3x+x^2} = \frac{1}{9-3(-3)+(-3)^2} = \frac{1}{27}$$

Factorizar suma de cubos

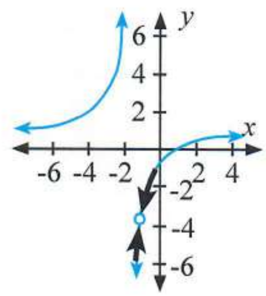
$3+x$ es un factor cero porque $3+(-3)=0$

Ejemplo 11

Calcula el $\lim\limits_{x \to -4/3} \dfrac{3x^2+x-4}{3x^2+10x+8}$.

$f(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{3x^2+10x+8}$

Dom f: $R - \{-2, -4/3\}$



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to -4/3} \frac{3x^2+x-4}{3x^2+10x+8} = \frac{3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 10\left(-\frac{4}{3}\right) + 8} = \frac{0}{0}$$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$3x+4$ es un factor cero porque $3\left(-\frac{4}{3}\right)+4=0$

Factorizar trinomio

$$\lim_{x \to -4/3} \frac{3x^2+x-4}{3x^2+10x+8} = \lim_{x \to -4/3} \frac{\cancel{(3x+4)}(x-1)}{\cancel{(3x+4)}(x+2)} = \lim_{x \to -4/3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-\frac{4}{3}-1}{-\frac{4}{3}+2} = -\frac{7}{2}$$

Factorizar trinomio

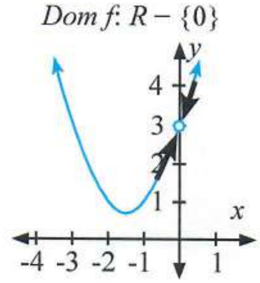
$3x+4$ es un factor cero porque $3\left(-\frac{4}{3}\right)+4=0$

Ejemplo 12

Calcula el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^3-1}{x}$.

$f(x) = \dfrac{(x+1)^3-1}{x}$

Dom f: $R - \{0\}$



Resolución:

Aplicar sustitución directa $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^3-1}{x} = \dfrac{(0+1)^3-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

Desarrollar y factorizar

$(x+1)^3 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x = x(x^2+3x+3)$

Cancelar la indeterminación

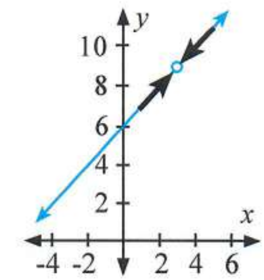
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^3-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2+3x+3)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} (x^2+3x+3) = (0)^2 + 3(0) + 3 = 3$$

Completa las siguientes actividades.

Actividad 1.7

$$f(x)=\frac{x^2+3x-18}{x-3}$$

Dom f: $R-\{3\}$



Calcula el $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}$.

Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x-3}=$$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

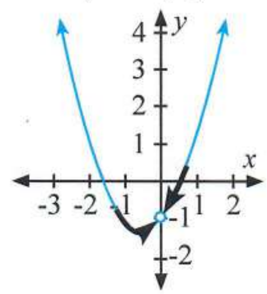
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x-3}=$$

Unidad 1

Actividad 1.8

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-x}{x}$$

Dom f: $R-\{0\}$



Calcula el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2-x}{x}$.

Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2-x}{x}=$$

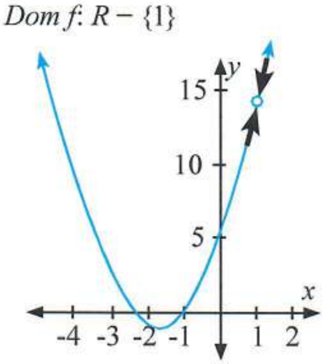
Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2-x}{x}=$$

Actividad 1.9

$$f(x)=\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x-1}$$

Dom f: $R-\{1\}$



Calcula el $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-2x-5}{x-1}$.

Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x-1}=$$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x-1}=$$

Actividad 1.10

Calcula el $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

Resolución:

Aplicar sustitución directa

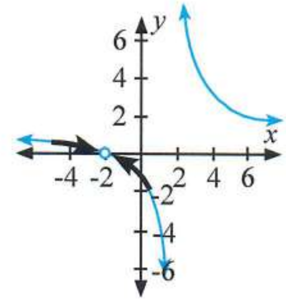
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} =$$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} =$$

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

Dom f: $R - \{-2, 2\}$



Unidad 1

Actividad 1.11

Calcula el $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,(x)-1}$.

Resolución:

Aplicar sustitución directa:

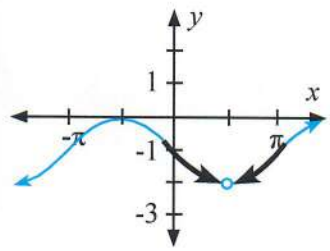
$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\,(x)-1} =$$

Identidad trigonométrica: $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\, x$

Aplicar factorización para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\,(x)-1} =$$

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\,(x)-1}$$



Dominio:

$R - \{x: x \neq (1+4k)\pi/2$ y

$x \neq -(3+2k)\pi/2$,

k entero no negativo$\}$

Ejercicios 1.7

1. Calcula los siguientes límites si existen, y verifica el resultado en la representación gráfica.

a) $\lim_{t\to 1} \dfrac{t-1}{t^2-1}$ b) $\lim_{s\to 2} \dfrac{s^2-5s-14}{s^2-4}$ c) $\lim_{r\to 4} \dfrac{r^2+4r-32}{r^2-6r+8}$ d) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4+2x^3}{x+2}$

e) $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2-2t+1}{t^3-1}$ f) $\lim_{s\to 3} \dfrac{s^2-9}{s^2-5s+6}$ g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$ h) $\lim_{x\to 3/2} \dfrac{8x+12}{64x^2-144}$

i) $\lim_{s\to 0} \dfrac{s}{s^2-4s}$ j) $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3-t^2}{t^2}$ k) $\lim_{x\to -\pi} \dfrac{\tan x}{\text{sen}\, x}$ l) $\lim_{x\to 5\pi/2} \dfrac{\cot x}{\cos x}$

m) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\cos^2 x + 2\cos x + 1}{\cos x + 1}$ n) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x-5}{x-1}$ ñ) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+x^2-21x-45}{x^3+7x^2+15x+9}$

o) $\lim_{r\to 2} \left(\dfrac{r^4-16}{r^2-4} + \dfrac{r^2-4}{r-2}\right)$ p) $\lim_{s\to 2} \left(\dfrac{s^4-16}{s^2-4}\right)\left(\dfrac{s^2+s-6}{s^2+7s+10}\right)$ q) $\lim_{t\to 1/2} \dfrac{4t^2+4t-3}{4t^2-1}$

Cálculo de límites por racionalización

Una vez comprobado que falla la sustitución directa al calcular el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, de acuerdo con la estrategia para calcular **límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$**, si hay radicales presentes, **multiplicar por una expresión equivalente 1 a conveniencia**, identificar los factores que son ceros (factores que al evaluarlos en $x = c$ se hacen cero), simplificar y obtener el límite.

¿Qué significa multiplicar por 1 a conveniencia para racionalizar? Implica tres aspectos:

1. El 1 se puede expresar como el cociente de dos números o expresiones algebraicas iguales diferentes de cero, por ejemplo:

$$1 = \frac{5}{5},\ 1 = \frac{-3}{-3},\ 1 = \frac{x+1}{x+1} \text{ para } x \neq -1,\ 1 = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \text{ para } x \neq 2.$$

2. Al multiplicar cualquier cantidad o expresión algebraica por 1, resulta la misma cantidad o expresión algebraica (ver propiedad del elemento neutro multiplicativo de los números reales), por ejemplo:

$$50(1) = 50,\quad \left(-\frac{2}{5}\right)(1) = -\frac{2}{5}\quad (2x)(1) = 2x,\quad \left(\frac{1}{x}\right)(1) = \frac{1}{x},\quad (5 + \sqrt{x})(1) = 5 + \sqrt{x}.$$

3. Para racionalizar el numerador o denominador de una expresión algebraica, se multiplica por un 1 a conveniencia.

Racionalizar el numerador

$$\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-25} = \left(\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-25}\right)(1) = \left(\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-25}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-5}\right) = \frac{\cancel{x-25}}{\cancel{(x-25)}(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}-5},\ x > 0 \text{ y } x \neq 25.$$

En este ejemplo, $\sqrt{x} - 5$ es el conjugado de $\sqrt{x} + 5$ y al multiplicarlos se aplica el producto de dos binomios conjugados $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

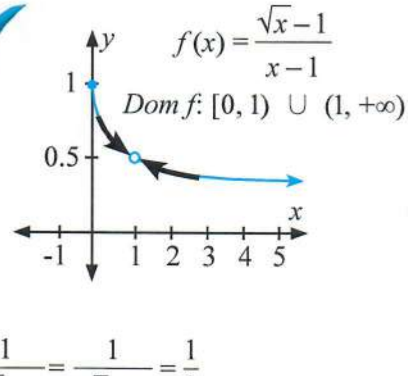
Racionalizar el denominador

$$\frac{2x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)(1) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = 2\sqrt{x},\ \text{para } x > 0.$$

A continuación se aplica la multiplicación por 1 a conveniencia al cálculo de límites.

Ejemplo 13

Calcula el $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

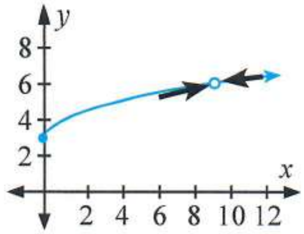
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 14

Calcula el $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

$$f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

Dom f: [0, 9) ∪ (9, +∞)



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{9-9}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right) = \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}{\cancel{x-9}} = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

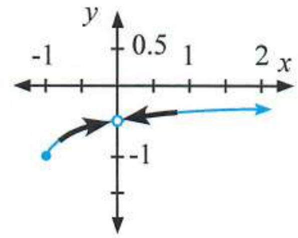
Ejemplo 15

Calcula el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

Resolución:

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$$

Dom f: [-1, 0) ∪ (0, +∞)



Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1-\sqrt{0+1}}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1-(x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{1+\sqrt{0+1}} = -\frac{1}{2}$$

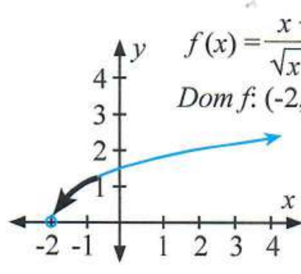
Ejemplo 16

Calcula el $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}}$.

Un ejemplo que te puede engañar si no exploras el dominio de la función o su representación gráfica.

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$$

Dom f: (-2, +∞)



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} = \frac{-2+2}{\sqrt{-2+2}} = \frac{0}{0}$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \to -2} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\right) = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}\sqrt{x+2}}{\cancel{x+2}} = \lim_{x \to -2} \sqrt{x+2} = \sqrt{-2+2} = 0$$

Observa la gráfica y el dominio de f, ¡no hay valores para aproximarse a -2 por la izquierda! Por lo que el $\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$ no existe. Solo existe el $\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$, por lo tanto el $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$ no existe. Como consecuencia de lo anterior, antes de calcular un límite, es recomendable explorar el dominio y la representación gráfica de la función.

Ahora, en los ejemplos vistos, aplicar la multiplicación por 1 a conveniencia al igual que la factorización, sirve para cancelar factores que ocasionan la indeterminación, y así obtener una función equivalente salvo en un punto, a la que se le pueda calcular el límite por sustitución directa.

A continuación completa los siguientes ejemplos:

Actividad 1.12

Calcula el $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$.

Resolución: Aplicar sustitución directa

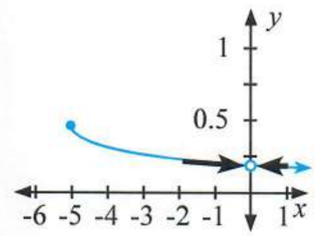
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} =$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} =$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$$

Dom f: [,) ∪ (, +∞)



Actividad 1.13

Calcula el $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Resolución: Aplicar sustitución directa

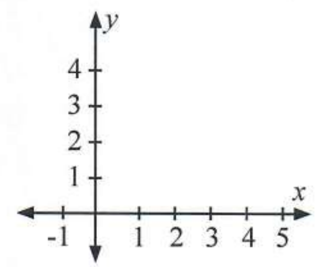
$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} =$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} =$$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

Dom f: [,) ∪ (,)



Actividad 1.14

Calcula el $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$.

Resolución: Aplicar sustitución directa

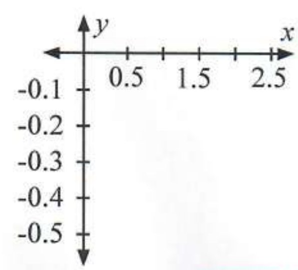
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}} =$$

Aplicar la multiplicación por 1 para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}} =$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$$

Dom f: (,)



Ejercicios 1.8

1. Cuándo x se aproxima a c, ¿el límite de $f(x)$ es igual a $f(c)$?
2. Cuándo c no está en el dominio de f, ¿el límite de $f(x)$ existe?
3. Cuándo c está en el dominio de f y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, ¿$f(c) = L$?
4. Calcula los siguientes límites si existen, y verifica el resultado en la representación gráfica de la función.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ b) $\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{\sqrt{t}-5}{t-3}$ c) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{\sqrt{4-s}-2}$ d) $\lim\limits_{r\to 5}\dfrac{\sqrt{r^2-9}-4}{r-5}$

e) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ f) $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\sqrt{t}-2}{t^2-16}$ g) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+4}-2}{t^2}$ h) $\lim\limits_{s\to 2}\dfrac{\sqrt{4s+1}-3}{s-2}$

i) $\lim\limits_{s\to 4}\dfrac{s-\sqrt{3s+4}}{4-s}$ j) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

m) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{1+t}-1}$ n) $\lim\limits_{s\to 3}\dfrac{s-3}{\sqrt{s-2}-\sqrt{4-s}}$ ñ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ o) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{a+t}-\sqrt{a-t}}{\sqrt{b+t}-\sqrt{b-t}}$

Cálculo de límites trigonométricos especiales

En el cálculo de límites de funciones trigonométricas, en los que mediante la factorización, racionalización o uso de identidades trigonométricas, no es posible cancelar los factores que causan la indeterminación, una alternativa, pueden ser las siguientes fórmulas especiales:

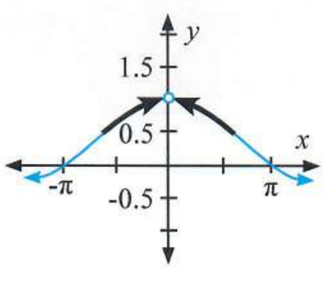
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

Ejemplo 17

Verificar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ mediante métodos gráficos y numéricos (no es una demostración formal).

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
-0.1	0.99833417
-0.01	0.99998333
-0.001	0.99999983
-0.0001	0.99999999

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
0.1	0.99833417
0.01	0.99998333
0.001	0.99999983
0.0001	0.99999999

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Dado que los límites laterales son iguales a 1, el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Para demostrar que el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$, se usan métodos analíticos, en particular, la múltiplicación por 1 a conveniencia, la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ y el límite especial $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, para obtener una función equivalente a partir de la cual se calcule el límite por sustitución directa.

Ejemplo 18

Demostrar que el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$.

Resolución:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)\left(\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$	Multiplicar por 1 a conveniencia
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)}$	Efectuar la multiplicación
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1+\cos x)}$	Indentidad trigonométrica
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$	Límite de un producto
$=(1)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$	Límite especial trigonométrico
$=\dfrac{0}{1+\cos 0}$	Sustitución directa
$=0$	Simplificando

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$.

Ahora veamos cómo usar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites.

Ejemplo 19

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

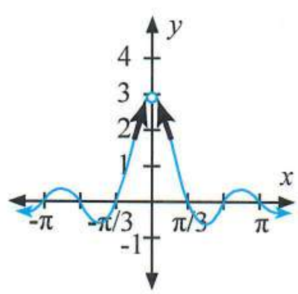
Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}=\frac{\operatorname{sen} 3(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Dom f: $R-\{0\}$



Aplicar los límites trigonométicos especiales para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}=\left(\frac{3}{3}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}=3(1)=3$$

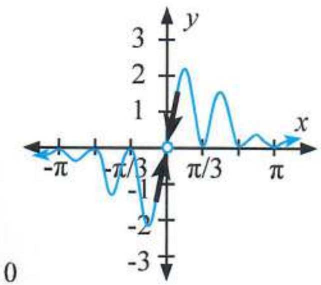
Unidad 1

Ejemplo 20

Calcula el $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 5x}{x}$.

$f(x) = \frac{\text{sen}^2 5x}{x}$

Dom f: $R - \{0\}$



Resolución:

Aplicar sustitución directa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 5x}{x} = \frac{\text{sen}^2 5(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicar los límites trigonométicos especiales para cancelar la indeterminación

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 5x}{x} = \left(\frac{5}{5}\right) \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 5x)(1+\cos 5x)}{x}$$

$$= 5 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{5x} \cdot \lim_{x\to 0} (1+\cos 5x) = 5(0)(1+\cos 5(0)) = 0$$

Para determinar límites trigonométricos se requiere de la habilidad para trabajar con expresiones algebraicas, así como del conocimiento de identidades trigonométricas. Pongamos a prueba tus conocimientos para calcular los siguientes límites.

Ejercicios 1.9

1. Calcula los siguientes límites si existen, y contrasta el resultado en la representación gráfica de la función.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 4x}$ b) $\lim_{t\to 0} \frac{6t}{\text{sen } 7t}$ c) $\lim_{s\to 0} \frac{1-\cos 3s}{s}$ d) $\lim_{r\to 0} \frac{4\tan^2 r}{r^2}$

e) $\lim_{s\to 0} \frac{s}{1-\cos 3s}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2x^2}$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\text{sen } 4x}$ h) $\lim_{r\to 0} \frac{\text{sen } r - r}{2r}$

i) $\lim_{t\to 2} \frac{\text{sen } (t-2)}{4t-8}$ j) $\lim_{s\to 0} \frac{\tan s - \text{sen s}}{s^3}$ k) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}$ l) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\sec t}{t^2 \sec t}$

Cálculo de límites exponenciales especiales

Además de los límites trigonométricos especiales, a continuación, se muestran dos límites matemáticos relacionados con el número e, en el ámbito de la matemática se le conoce como número de Euler. Es un número irracional cuyo valor aproximado es 2.718281828459045…

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ b) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

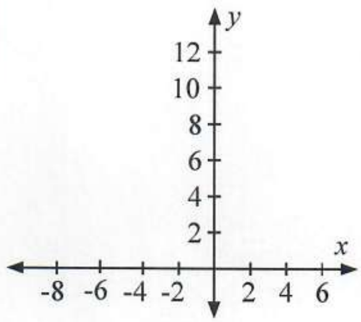
A continuación verifica cada uno de estos límites.

Actividad 1.15

Verificar que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ mediante métodos gráficos y numéricos (no es una demostración formal).

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
-0.00001	
-0.000001	

$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	
0.000001	

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

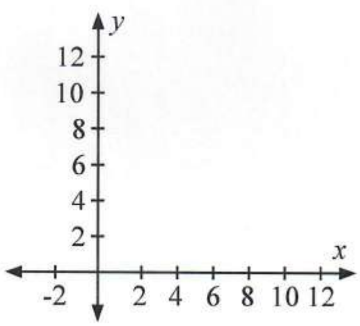
Dado que los límites laterales son iguales a 1, el $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Actividad 1.16

Verificar que $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ mediante métodos gráficos y numéricos (no es una demostración formal). A este límite se le conoce como límite fundamental algebraico.

x	$(1 + x)^{1/x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
-0.00001	
-0.000001	

$\lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x} = e$



$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	
0.000001	

$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$

Dado que los límites laterales son iguales a e, el $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Actividad intermedia:
Trabajo en equipo

Resuelve el siguiente problemario y realiza una autoevaluación del aprendizaje logrado

1. Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y rango.

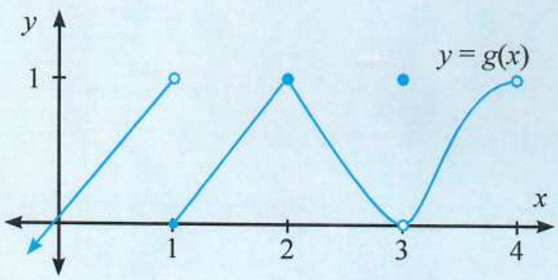
   a) $f(x) = (x+3)^3 - 2$ b) $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$ c) $h(x) = 1 - \ln x$

2. Determina la función inversa de $f(x) = \cos x$, para el dominio restringido $x \in [0, \pi)$.

3. Determina el dominio de las funciones y límite indicado.

   a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2 + x - 6}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1 - x^2}$

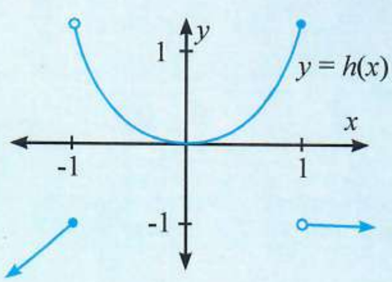
4. A partir de la representación gráfica de $g(x)$ determina los siguientes límites.



   a) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

   c) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

5. Observa la representación gráfica de la función h y realiza la gráfica de:



   a) $h(x) + 1$ b) $h(x) - 1$

   c) $h(x+1)$ d) $h(x-1)$

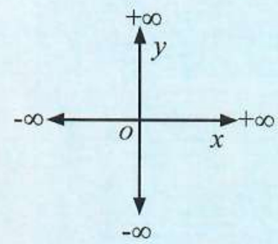
   e) $h(-x)$ f) $-h(x)$

6. Determina los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\,(a+x) - sen\,(a-x)}{x} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(e^{x^3 - x} - \ln\,(x^2+1) \right)$

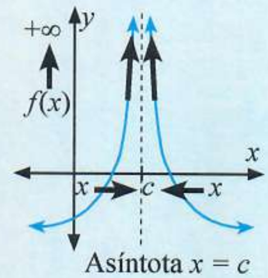
1.2.4 Límites infinitos y límites en el infinito

El sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares) está formado por el eje de las abscisas "x" y por el eje de las ordenadas "y". Haciendo una analogía de cada eje con la recta numérica, para un lado se prolongan al infinito para el otro a menos infinito.

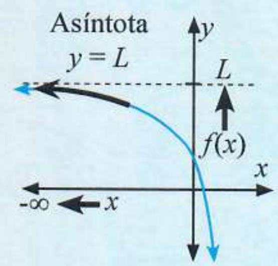


El infinito se denota con el símbolo "∞", que representa el comportamiento de un valor numérico cuando este se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Con base en lo anterior:

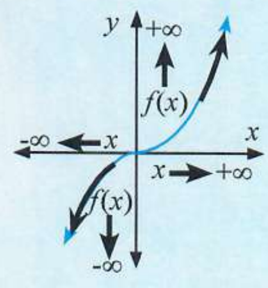
- En el estudio del límite infinito $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, decir que el límite de una función es infinito o menos infinito, en símbolos es simplemente una forma específica de decir que el límite no existe. Este tipo de límite se usa para determinar si una función tiene una asíntota vertical $x = c$. Es decir, en funciones que se aproximan a $+\infty$ o $-\infty$, a medida que los valores de x se aproximan a la asíntota $x = c$ por la izquierda y/o por la derecha de c.



- En el estudio del límite en el infinito $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, decir que x se aproxima a $+\infty$ o $-\infty$, en símbolos es simplemente una forma específica de decir que x se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Este tipo de límite se usa para determinar si una función tiene una asíntota horizontal $y = L$. Es decir, en funciones que se aproximan a L, a medida que los valores de x se aproximan a $+\infty$ por la izquierda o a $-\infty$ por la derecha.



- Y en el estudio del límite infinito en el infinito $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, decir que el límite de una función dada es infinito o menos infinito, cuando x se aproxima a $+\infty$ o $-\infty$, en símbolos es simplemente una forma específica de decir que cuando x se hace extremadamente grande en el sentido positivo o negativo de la recta numérica, el límite de la función no existe.



Límites infinitos

Para el estudio de límites infinitos $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, se debe tener en cuenta los tipos comunes del comportamiento de $f(x)$ asociados a la no existencia del $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ vistos anteriormente, en particular, cuando la función crece o decrece indefinidamente. Aunque el límite no exista, es útil para determinar la **asíntota vertical** de una función. Una **asíntota** es una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de una función, y a medida que se extiende indefinidamente la distancia entre ellas tiende a cero.

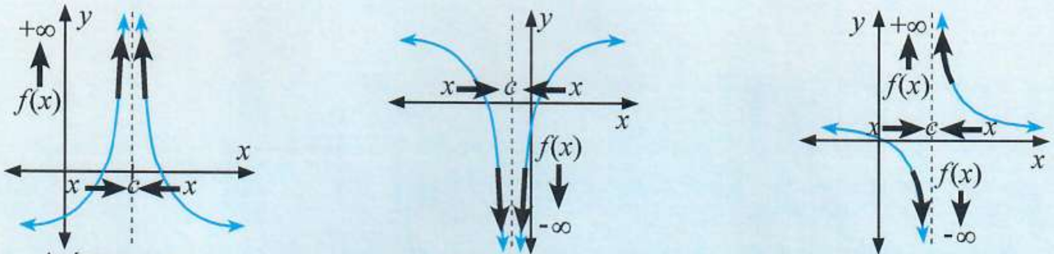
> Si en una función f, uno de los límites laterales tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $x \to c$, entonces $x = c$ es una asíntota vertical de f.

En los límites infinitos del tipo $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ siempre aparece una **asíntota vertical en $x = c$**, en consecuencia, se satisface al menos uno de los siguientes casos:

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$

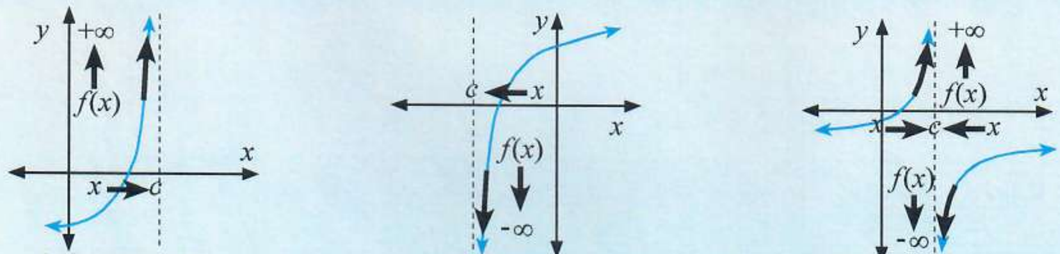
Si el límite cuando $x \to c$ tiende a $+\infty$, en la graficación de funciones, su interpretación es que la función crece de manera asintótica, y si el límite tiende a $-\infty$, la función decrece de manera asintótica, otro aspecto a considerar es si x se está acercando a c por la derecha o por la izquierda. A continuación se muestran algunos de los casos que se presentan en funciones con asíntotas verticales.



Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$

Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$



Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$

Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

Asíntota $x = c$ — $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

La función logaritmo es una de las funciones que tiene una asíntota vertical.

Ejemplo 21

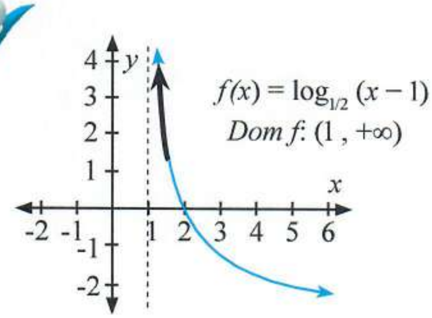
Determina el $\lim_{x\to 1^+} \log_{1/2}(x-1)$.

Resolución:

De la gráfica, cuando $x \to 1^+, f(x) \to +\infty$.

Por lo que $x = 1$ es una asíntota vertical de f.

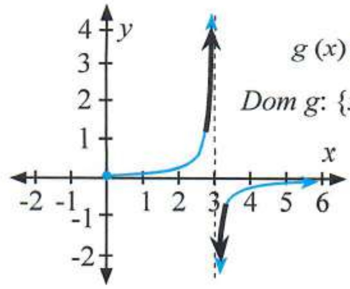
En consecuencia $\lim_{x\to 1^+} \log_{1/2}(x-1) = +\infty$



Otras funciones que tienen asíntotas verticales son el cociente de funciones $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ siempre y cuando $g(c) \neq 0$ y $h(c) = 0$ (en $x = c$ hay un **salto infinito**), entonces $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$. Aplica lo anterior para realizar los siguientes ejemplos.

Actividad 1.17

Determina el límite $\lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{x}}{9 - x^2}$.



$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{9 - x^2}$

Dom g: $\{x \geq 0, x \neq 3\}$

Resolución:

De la gráfica, cuando ________, $g(x)$ _______.

Por lo que _____ es una asíntota __________ de g.

En consecuencia $\lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{x}}{9 - x^2} =$

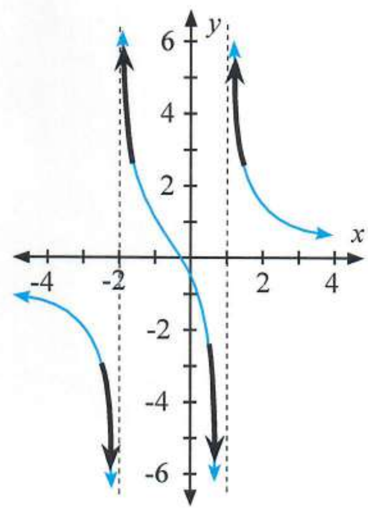
Actividad 1.18

$h(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2}$

Dom h: $R - \{-2, 1\}$

Determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -2^-} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2}$ b) $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2}$ c) $\lim_{x \to 1^+} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2}$



Resolución:

a) De la gráfica, cuando x________, $h(x)$ ________.

Por lo que _____ es una asíntota ____________ de h.

En consecuencia $\lim_{x \to -2^-} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} =$

b) De la gráfica, cuando x________, $h(x)$ ________.

Por lo que _____ es una asíntota ____________ de h.

En consecuencia $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} =$

c) De la gráfica, cuando x________, $h(x)$ ________.

Por lo que _____ es una asíntota ____________ de h.

En consecuencia $\lim_{x \to 1^+} \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} =$

En los ejemplos anteriores se usó la representación gráfica para explorar el comportamiento de una función en la asíntota vertical $x = c$, y a partir de ello, determinar si el límite por la izquierda y por la derecha tienden a $+\infty$ o $-\infty$ (en la asíntota vertical la función crece o decrece indefinidamente). Ahora, en los siguientes ejemplos calcularemos el límite mediante métodos numéricos, para conocer si la función crece o decrece sin límite cuando tiene una asíntota vertical.

Ejemplo 22

Determina el comportamiento de la función $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$ cuando $x \to 3$ por la izquierda y derecha.

Resolución:

Aplicar sustitución directa: $\lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \frac{3 + 3}{3^2 - 9} = \frac{6}{0}$. Significa que en $x = 3$ hay una asíntota vertical.

Aplicar métodos numéricos para explorar el comportamiento de la función en $x = 3$.

Límite por la izquierda

x	$f(x)$
2.999	-1000
2.9999	-10000
2.99999	-100000

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9} = -\infty$$

La función f decrece indefinidamente por la izquierda de la asíntota $x = 3$, y crece indefinidamente por la derecha.

Límite por la derecha

x	$f(x)$
3.001	1000
3.0001	10000
3.00001	100000

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9} = +\infty$$

En los siguientes ejemplos pon a prueba tus conocimientos.

Actividad 1.19

Determina el comportamiento de la función $f(x) = -\dfrac{3x+7}{2x+5}$ cuando $x \to -\dfrac{5}{2}$ por la izquierda y por la derecha.

Resolución:

Aplicar sustitución directa: $\lim\limits_{x \to -5/2} \left(-\dfrac{3x+7}{2x+5}\right) =$ __________________. Significa que en $x = -\dfrac{5}{2}$ hay una _______________

Aplicar métodos numéricos para explorar el comportamiento de la función en $x = -5/2$.

Límite por la izquierda

x	$f(x)$
-2.501	
-2.5001	
-2.50001	

$$\lim_{x \to -5/2^-} \left(-\frac{3x+7}{2x+5}\right) =$$

La función f________________

____

____

____

____

____

Límite por la derecha

x	$f(x)$
-2.499	
-2.4999	
-2.49999	

$$\lim_{x \to -5/2^+} \left(-\frac{3x+7}{2x+5}\right) =$$

Actividad 1.20

Determina el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^4}$ cuando $x \to -1$ por la izquierda y por la derecha.

Resolución:

Aplicar sustitución directa: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x+1)^4} =$ _________. Significa que en $x = -1$ hay una ____________.

Aplicar métodos numéricos para explorar el comportamiento de la función en $x = -1$.

Límite por la izquierda

x	$f(x)$
-1.001	
-1.1001	
-1.10001	

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^4} =$$

La función f________________

____

____

____

____

____

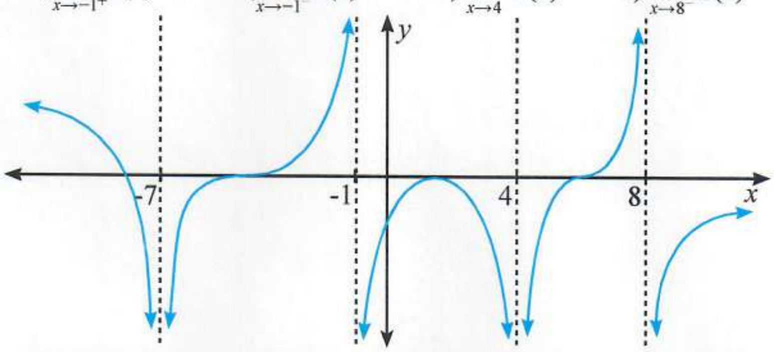
Límite por la derecha

x	$f(x)$
-0.999	
-0.9999	
-0.99999	

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)^4} =$$

Ejercicios 1.10

1. Explica el significado de decir que:
   a) $\lim_{x\to -5} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x\to -5/2} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x\to 7} f(x) = +\infty$
2. Si $\lim_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$, entonces la recta $x =$____ es una asíntota ________ de la función $f(x)$.
3. Un cociente de funciones $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ tiene una asíntota vertical si________________
4. Para la función h cuya gráfica se muestra a continuación, calcula lo siguiente.
   a) $\lim_{x\to -7} h(x)$ b) $\lim_{x\to -1^+} h(x)$ c) $\lim_{x\to -1^-} h(x)$ d) $\lim_{x\to 4} h(x)$ e) $\lim_{x\to 8^-} h(x)$ f) $\lim_{x\to 8^+} h(x)$



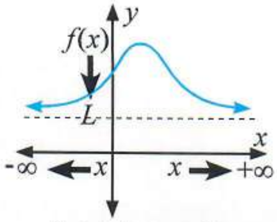
5. Usa el límite para determinar las asíntotas verticales de las siguientes funciones, así como su comportamiento en la asíntota (para el inciso f) usa métodos numéricos y/o gráficos).
   a) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$
   e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ f) $f(x) = \ln x - 3$ g) $h(r) = \dfrac{2r+3}{r-8}$ h) $g(t) = \dfrac{t+2}{t^2-4}$
   i) $g(s) = \dfrac{\sqrt{s}}{9-s^2}$ j) $h(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$ k) $f(r) = \dfrac{r^2-3r+6}{r^2-12r+20}$ l) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$
6. ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la función $f(x) = \tan x$?
7. Si $f(x)$ no está definida en c, ¿significa que $x = c$ es una asíntota vertical de $f(x)$?
8. Explica por qué las asíntotas verticales no pueden ser intersecadas por la representación gráfica de una función.
9. El tamaño de la pupila de cierto animal está dado por $f(x)$ en (mm), donde x es la intensidad de la luz sobre la pupila. Si $f(x) = \dfrac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$, determina el tamaño cuando $x \to 0$ (sin luz) y el tamaño de la pupila con una cantidad infinita de luz ($x \to +\infty$).

Límites en el infinito

El estudio de límites del tipo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ lo identificamos con el cálculo de la ecuación de la **asíntota horizontal** (si existe) de una función.

Si en una función f el $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ o ambos, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de f.

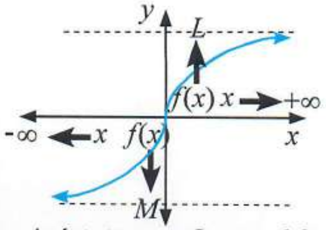
Una función puede tener infinitas asíntotas verticales, como es el caso de las funciones $f(x) = \tan x$ y $f(x) = \cot x$. Sin embargo, una función solo puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, ¿por qué? Algunos de los comportamientos de la asíntota horizontal, son los siguientes.



Asíntota $y = L$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

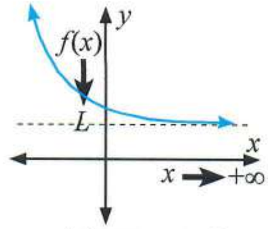
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



Asíntotas $y = L$ y $y = M$

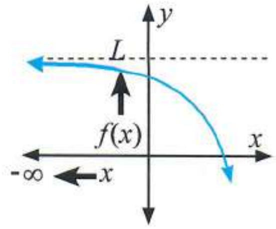
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = M$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



Asíntota $y = L$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



Asíntota $y = L$

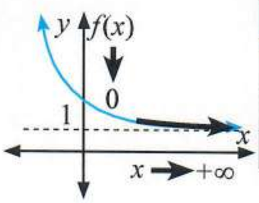
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Recordemos que la función logaritmo tiene una asíntota vertical, y su función inversa, que es la función exponencial, tiene una asíntota horizontal.

Ejemplo 23

Determina la ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, la cual es una traslación de la función básica $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Resolución:



Límite por la izquierda

x	$f(x)$
10	1.0009765625
30	1.0000000009313225746
50	1.0000000000000008881

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \right) = 1$$

De la representación gráfica de f y de los valores de la tabla, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$.

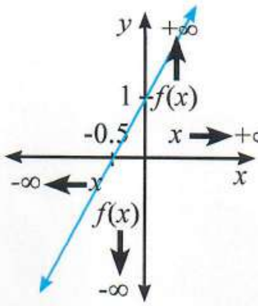
Por lo que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

En el caso de las funciones racionales $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}$, donde $q(x) \neq 0$, para determinar las asíntotas horizontales mediante el cálculo de límites en el infinito, primero necesitamos conocer el comportamiento del $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ de funciones polinomiales de grado mayor que cero, y luego el comportamiento de los límites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n}$ y $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{k}{x^n}$, para $n \in N$ y $k \in Z$.

El límite de una función racional

Para conocer el comportamiento en el infinito de las funciones racionales, veamos primero el caso de las funciones polinomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ para $n > 0$ y $a_n \neq 0$, exploremos su representación gráfica, así como, su reflexión sobre el eje de las abscisas para identificar regularidades relacionadas con el signo del coeficiente "a_n" y el grado "n", y a partir de ellas establecer las condiciones para determinar el $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

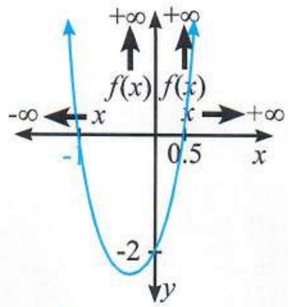
$f(x) = 2x + 1$
$a_n = 2,\ n = 1$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

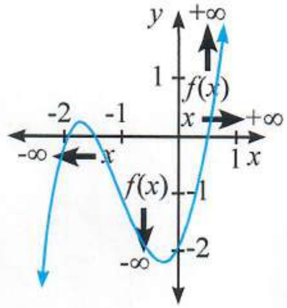
$f(x) = 3x^2 + 2x - 2$
$a_n = 3,\ n = 2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

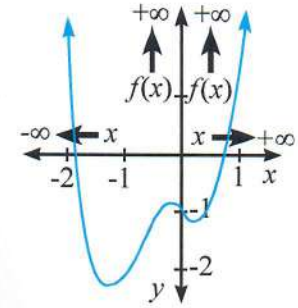
$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$
$a_n = 1,\ n = 3$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 1$
$a_n = 2,\ n = 4$

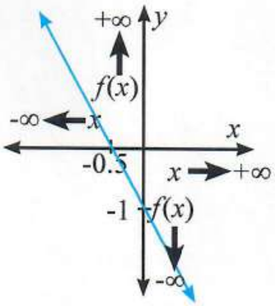


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

A continuación exploremos las reflexiones sobre el eje de las abscisas de las funciones polinomiales anteriores.

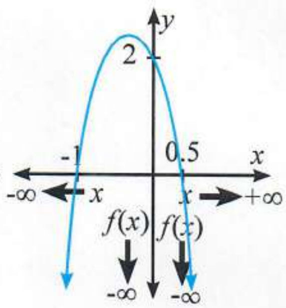
$f(x) = -2x - 1$
$a_n = -2,\ n = 1$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

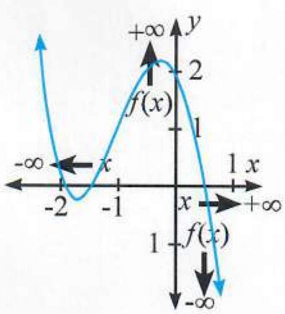
$f(x) = -3x^2 - 2x + 2$
$a_n = -3,\ n = 2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

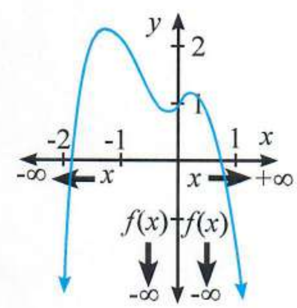
$f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 2$
$a_n = -1,\ n = 3$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 1$
$a_n = -2,\ n = 4$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

A partir de explorar el signo del coeficiente "a_n" y el grado "n" de una función polinomial cuando $x\to\pm\infty$, se obtienen las siguientes regularidades.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \text{ y } n \text{ par} \\ +\infty, & \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ impar} \\ -\infty, & \text{si } a_n > 0 \text{ y } n \text{ impar} \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ par} \end{cases}$$

Este es el primer resultado que se necesita para calcular el límite en el infinito de funciones racionales. Como ya sabemos, en el campo de los números reales no está definido el realizar operación alguna con el símbolo ∞, pues no es un número.

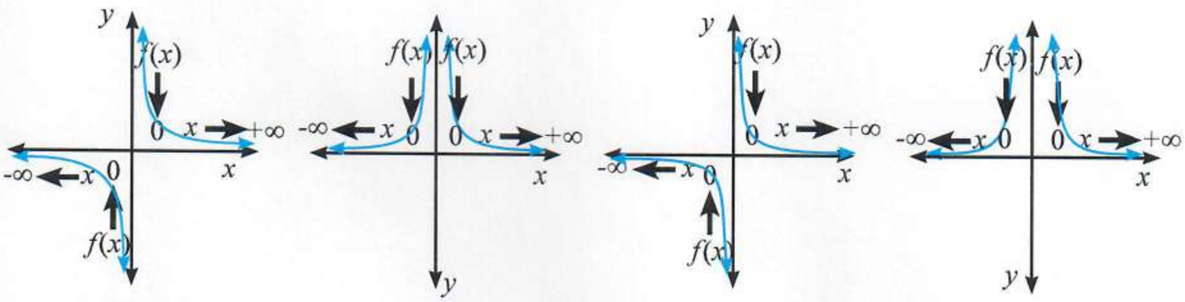
La utilidad del resultado se refleja en el cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

El cual depende del signo del coeficiente "a_n" y del grado "n" de cada función polinomial. Para cancelar los variables de los térmimos del numerador y del denominador que ocasionan dicha indeterminación, se necesita del resultado de los siguientes límites.

Exploración del límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}$.

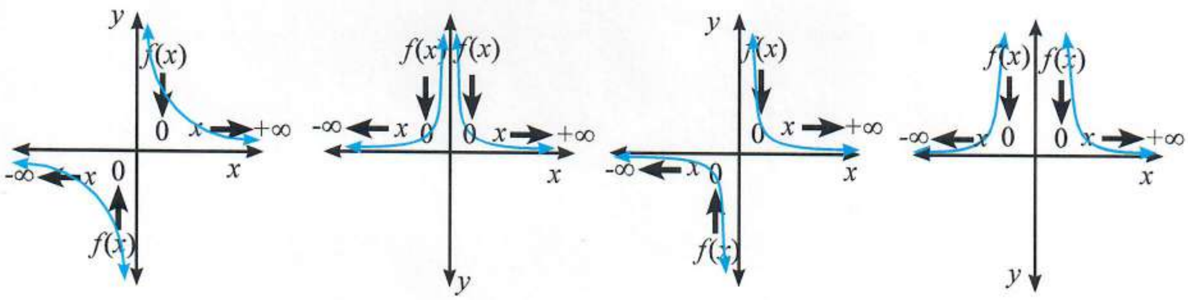
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^4}$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Continuemos con la exploración del límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n}$.

$f(x) = \frac{5}{x}$ $\quad f(x) = \frac{9}{x^2}$ $\quad f(x) = \frac{4}{x^3}$ $\quad f(x) = \frac{7}{x^4}$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Como resultado de la exploración, se tiene que el $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ y el $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ (su demostración requiere de la definición formal del límite, por lo que se deja para cursos avanzados de cálculo). Como ya se mencionó, estos límites se usan para cancelar las variables que ocasionan la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que aparece al calcular el $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} \right)$ de una función racional. Veamos los siguientes ejemplos.

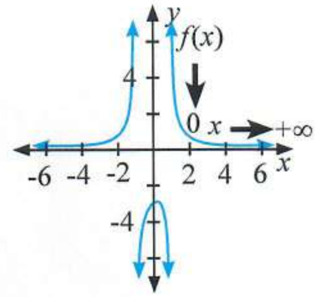
Situación 1. El grado del polinomio del numerador "n" es **menor que** el grado del denominador "m".

Ejemplo 24

Calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1}$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1}$$

Dom f: $R - \{-1, 1\}$



Resolución:

Aplicar el límite en el infinito de un polinomio

En el numerador $a_n = 2$, $n = 2$ y en el denominador $a_m = 1$, $m = 4$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Para cancelar la indeterminación, dividir cada término del numerador y denominador por la variable de mayor grado "x^4", luego, aplicar los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{3}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^{4-2}} - \frac{1}{x^{4-1}} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^{4-4}} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^0} - \frac{1}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0} = 0$$

Dado que el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^4 - 1} = 0$, la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

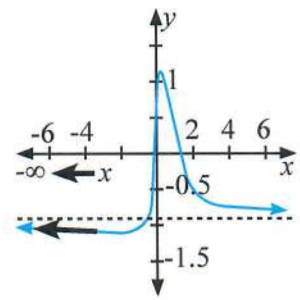
Situación 2. El grado del polinomio del numerador "n" es **igual al** grado del denominador "m".

Ejemplo 25

Calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2 - 4x - 2}{-6x^2 - x - 2}$.

$$f(x) = \frac{5x^2 - 4x - 2}{-6x^2 - x - 2}$$

Dom f: R



Resolución:

Aplicar el límite en el infinito de un polinomio

En el numerador $a_n = 5$, $n = 2$ y en el denominador $a_m = -6$, $m = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 4x - 2}{-6x^2 - x - 1} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

Para cancelar la indeterminación, dividir cada término del numerador y denominador por la variable de mayor grado "x^2", luego, aplicar los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{-\frac{6x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^{2-2}}-\frac{4}{x^{2-1}}-\frac{2}{x^2}}{-\frac{6}{x^{2-2}}-\frac{1}{x^{2-1}}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{-6-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}5-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}(-6)-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{5-0-0}{-6-0-0}=-\frac{5}{6}$$

Dado que el $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-2}{-6x^2-x-2}=-\frac{5}{6}$, la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=-\frac{5}{6}$.

Situación 3. El grado del polinomio del numerador "n" es **mayor que** el grado del denominador "m".

Ejemplo 26

Calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}$.

Resolución:

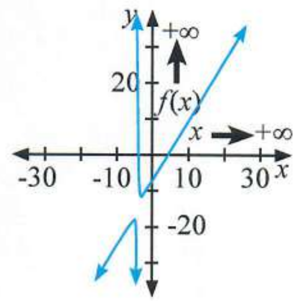
Aplicar el límite en el infinito de un polinomio

En el numerador $a_n=-2$, $n=2$ y en el denominador $a_m=-1$, $m=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-3x+25}{-x-3}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

$$f(x)=\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}$$

Dom f: $R-\{-3\}$



Para cancelar la indeterminación, dividir cada término del numerador y denominador por la variable de mayor grado "x^2", luego, aplicar los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n}=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^{2-2}}+\frac{3}{x^{2-1}}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{1}{x^{2-1}}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}}{-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2)+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{25}{x^2}}{-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2}}=\frac{-2+0+0}{-0-0}=\frac{-2}{0}$$

Dado que el $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}=\frac{-2}{0}$, se tiene una indeterminación, por lo que el límite no existe, es decir, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x+25}{-x-3}=+\infty$, dado que $\frac{-2x^2}{-x}=2x>0$ cuando $x\to+\infty$. Además, la función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Los resultados de los ejemplos 24, 25 y 26 se pueden obtener sin realizar todos esos procedimientos algebraicos. Para ello, es necesario demostrar el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ una función polinomial con $a_n \neq 0$. Demostrar que el $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_nx^n$.

Demostración

Primero expresemos la función $f(x)$ de tal forma que se le pueda aplicar el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{k}{x^n} = 0$ para $n \in N$ y $k \in Z$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0\\
&= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x^{n-(n-1)} + a_0x^{n-n}\\
&= a_nx^n + a_{n-1}\, x^nx^{-1} + a_{n-2}x^n\, x^{-2} + \cdots + a_1x^nx^{-(n-1)} + a_0x^n\, x^{-n}\\
&= x^n\,(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \cdots + a_1x^{-(n-1)} + a_0x^{-n})\\
&= x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}(x^n)\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}(x^n)\,(a_n + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

Ahora, usemos el resultado anterior al cálculo del límite de una función racional.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_nx^n}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} b_mx^m}$$

A partir de este resultado, y el de los ejemplos 24, 25 y 26, se propone la siguiente estrategia para calcular límites en el infinito de funciones racionales.

Estrategia para calcular límites en el infinito de funciones racionales

Sea f una función racional definida por el cociente de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}\text{, donde } q(x) \neq 0.$$

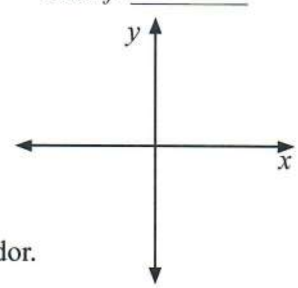
1. Si el grado del numerador "n" es **menor que** el grado del denominador "m", entonces el límite es 0, en símbolos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. **Hay una asíntota horizontal $y = 0$ (coincide con el eje de las abscisas).**
2. Si el grado del numerador "n" es **igual** al grado del denominador "m", entonces el límite es el coeficiente del término principal del numerador dividido por el coeficiente del término principal del denominador, en símbolos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$. **Hay una asíntota horizontal en** $y = \frac{a_n}{b_m}$.
3. Si el grado del numerador "n" es **mayor que** el grado del denominador "m", entonces el límite no existe, en símbolos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. **No hay asíntotas horizontales.** Además, según el signo de $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ cuando $x\to\pm\infty$, es hacia donde tiende el límite $+\infty$ o $-\infty$.

A continuación, aplica la estrategia propuesta para calcular límites en el infinito de funciones racionales.

Actividad 1.21

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^3 - x + 7}$$

Dom f: ________



Calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^3 - x + 7}$.

Resolución:

Aplicar el límite en el infinito de un polinomio

En el numerador a_n=__, n = __ y en el denominador a_m= __ , m = __

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^3 - x + 7} =$$

Dado que el grado del numerador es ________ que el grado del denominador.

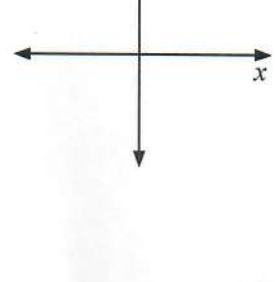
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3x^3 - x + 7} =$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en y = ______.

Actividad 1.22

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7}$$

Dom f: ________



Calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7}$.

Resolución:

Aplicar el límite en el infinito de un polinomio

En el numerador a_n=__, n = __ y en el denominador a_m= __, m = __

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7} =$$

Dado que el grado del numerador es ________ que el grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7} =$$

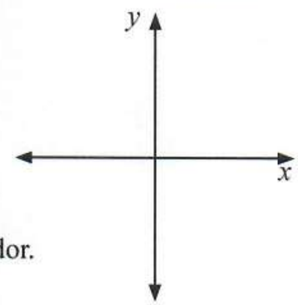
Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y =$ ______.

Actividad 1.23

Calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3}$.

$$f(x) = \frac{4x^3 - x^6}{1 - 5x^3}$$

Dom f: ___________



Resolución:

Aplicar el límite en el infinito de un polinomio.

En el numerador $a_n =$ __, $n =$ __ y en el denominador $a_m =$ __, $m =$ __

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3} = \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3} =$$

Dado que el grado del numerador es ________ que el grado del denominador.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3} = \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + x^6}{1 - 5x^3} =$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ ____ tiene asíntotas horizontales.

Pon a prueba el conocimiento sobre los límites en el infinito.

Ejercicios 1.11

1. Decir que $x \to -\infty$ significa ____.
   Decir que el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa ______________________________________.
   Decir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ significa ______________________________________
   ____.

2. Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 11$, la recta $y =$ ________ es una asíntota ___________ de la gráfica $y = f(x)$.

3. Explica por qué las asíntotas horizontales pueden intersectar más de una vez a la representación gráfica de una función.

4. Aplica los límites en el infinito para determinar las asíntotas horizontales (si existen) de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \dfrac{x}{x - 7}$ b) $g(t) = \dfrac{4t}{4t - 7}$ c) $h(s) = \dfrac{s^2 - 2s}{s}$ d) $f(t) = \dfrac{4t - 10}{t^2 - 2t - 15}$

e) $h(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}$ f) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x-4}$ g) $f(s)=\dfrac{-s^4+3s-92}{s^2-7s-44}$ h) $g(t)=\dfrac{3t}{t-2}$

i) $f(s)=\dfrac{3s^2-6s+4}{-s^2+4s-3}$ j) $g(t)=\dfrac{t^2-5t-9}{2t^4+3t^3}$ k) $h(x)=\dfrac{x^9+x^3+x}{x^6+x^2+1}$ l) $h(t)=\dfrac{-3t^4-2t+1}{-4t^5-t^2+t}$

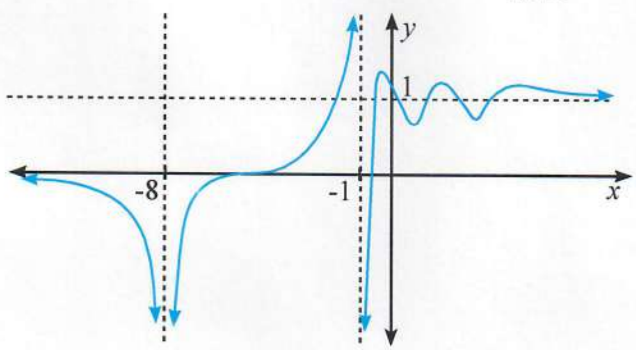
m) $f(x)=\dfrac{-6x^4+x^2+1}{2x^4-x}$ n) $g(s)=\dfrac{3s^3+4s^2-s+1}{-s^2+1}$ ñ) $h(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+\frac{1}{2}}$

5. Aplica los límites en el infinito para determinar las asíntotas horizontales (si existen) de las siguientes funciones.

a) $h(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2-1}}$ b) $f(t)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{5x}{x^2+4}}$ d) $h(s)=\dfrac{\sqrt{3s^2+6}}{5-2s}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^6+8}}{2x^3+6x+1}$ f) $h(s)=\sqrt{\dfrac{2s^3-5s^2+4s-6}{6s^3+2s}}$ g) $f(x)=\dfrac{1+7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$

6. Use la representación gráfica para determinar los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



7. Traza la representación gráfica de una función $y=f(x)$ que satisfaga las condiciones dadas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$

Hemos llegado a la parte final del tema de *límites.* La importancia del límite no solo radica en explorar el comportamiento de una función en un punto o en el infinito, pues son la base en el estudio de las funciones continuas, funciones cuya característica principal es que se pueden trazar sin despegar el lápiz de la hoja, de lo contrario, la función se clasifica como discontinua, es decir, presenta un hueco, un salto finito o un salto infinito.

Las funciones continuas son el siguiente tema de estudio.

1.3 Funciones continuas

> **Propósito**
>
> Determina si una función es continua o discontinua en un punto o en un intervalo, aplicando el concepto de límite en un punto.

Como **antecedente** se tiene que el estudio del límite de una función f toma importancia en funciones que presentan un hueco, un salto finito, un salto infinito en un punto o que f tienda a un número real cuando $x \to \pm\infty$. En el tema de las funciones continuas, desde el punto de vista de la representación gráfica de f, se busca diferenciar las funciones que presentan saltos similares al de la función escalón o que tengan asíntotas verticales, de las que tienen un hueco o un hueco y un punto desplazado, pues son estos dos últimos casos, en los que la discontinuidad puede ser removida redefiniendo la función.

Recuerda que mediante la representación gráfica de una función f y de su dominio, se puede identificar un hueco, un salto finito o infinito, ahora, ¿qué relación hay entre los huecos y saltos con la existencia o no del límite? Por otra parte, si una función continua es aquella que se puede trazar sin despegar el lápiz de la hoja, ¿cómo usar el límite para identificar si una función es continua o discontinua en un punto o en un intervalo? Y si una función es discontinua, ¿en qué casos puede ser removida su discontinuidad? Estos son los casos en los que el tema de continuidad resalta su importancia.

1.3.1 Definición de continuidad en un punto

En la vida cotidiana, el concepto de continuidad se entiende como un proceso que no se interrumpe, por ejemplo: el tiempo que transcurre durante la vida de una persona, el desplazamiento de un automóvil en un intervalo de tiempo y la línea continua de una carretera que indica no rebasar. En contraparte está el concepto de discontinuidad, que se entiende como procesos interrumpidos, por ejemplo: el que un automóvil se detenga en cada semáforo, el que una persona haga pausas para emitir un sonido y el que un abanico de una laptop se detenga cada vez que ha logrado enfriar sus componentes. Veamos un ejemplo desde las matemáticas en la actividad empresarial.

Un empresario decide invertir en la producción de fundas de silicón para celular, su costo de producción se calcula mediante la función $C(x) = \dfrac{4x - 100}{x - 5}$, para $x \geq 0$ y $x \neq 5$, en donde x es el número de fundas producidas (en cientos) y C es el costo de producción (en miles de pesos).

El empresario observa que no es posible calcular el costo de producción cuando se producen 500 fundas, esto significa que $C(x)$ tiene una discontinuidad en $x = 5$, si exploras la representación gráfica, esta tiene un hueco, ¿se puede remover la discontinuidad en $x = 5$?

El empresario recuerda lo brillante que fue en las clases de cálculo, así que, para ver si es posible remover del hueco, decide aplicar las matemáticas aprendidas en sus clases de límites y en continuidad de funciones, para explorar el comportamiento de f cuando $x \to 5$, y ver si es posible remover el hueco de la función. Para ello, busca en internet videos que le ayuden a recordar los procedimientos vistos alguna vez en clase. El proceso a seguir es el siguiente:

- Verificar que $\lim\limits_{x \to 5} C(x)$ existe.

$$\lim_{x \to 5} C(x) = \lim_{x \to 5} \frac{4x^2 - 100}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{4(x^2 - 25)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{4(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = 4 \lim_{x \to 5} (x + 5) = 40$$

Por lo que **el límite existe**, y de ahí deduce que producir 500 fundas de silicón le cuesta \$40,000.

- Asegurar que C(5) esté definida.
  Define $C(x) = 40$ para $x = 5$, con esto **C(5) está definida**.
- Verificar que $\lim\limits_{x \to 5} C(x) = C(5)$.
  Como consecuencia de los dos puntos anteriores, se tiene que el $\lim\limits_{x \to 5} C(x) = C(5)$.

Por lo tanto, $C(x)$ pasa de ser una función discontinua en $x = 5$ a ser continua al redefinirla como:

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 100}{x - 5}, & \text{para } x \geq 0 \text{ y } x \neq 5 \\ 40, & \text{para } x = 5 \end{cases}$$

El empresario, en su proceso verificó que la función $C(x)$ satisfaga la siguiente definición.

Definición de continuidad en *c*

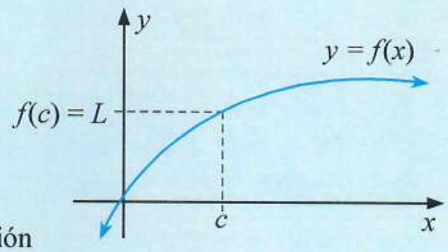
La función f es continua en el número real c, si

I) $f(c)$ está definida en c,

II) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe, y

III) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

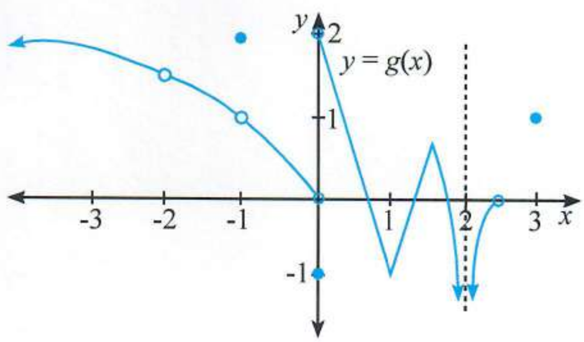
Si una de las condiciones no se satisface, se dice que la función es discontinua en $x = c$.



Al explorar el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, se hizo énfasis en los valores de f cercanos a c, en vez de lo que le sucede a la función en $x = c$. Y en el caso de la continuidad de una función en un punto, se hace énfasis en lo que le sucede a f en $x = c$, es decir, se explora el comportamiento de f en $x = c$ para ver si se satisface la condición $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Actividad 1.24

Verificar si la representación gráfica de $g(x)$ es continua en x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.



A partir de la representación gráfica de la actividad 1.24, se determinó si la **función a trozos** $y = g(x)$ es continua en x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

- ¿Cuáles de éstos valores de x pertenecen al dominio de g?
- ¿En cuáles g es continua?
- Si un valor de x está en el dominio de g, ¿es condición suficiente para que sea continua en dicho valor?

Una condición necesaria para que g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, es que dichos valores estén en el dominio de g, es decir, que $g(-3)$, $g(-2)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ y $g(3)$ estén definidos, pero esto no es suficiente. Veamos si la existencia del límite en un punto es condición suficiente para asegurar la continuidad de g en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

- ¿En cuáles de éstos valores de x existe el límite?
- ¿En cuáles g es continua?
- Si el límite de g existe en un valor dado de x, ¿es condición suficiente para que sea continua en dicho valor?

Otra condición necesaria para que g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, es que el límite exista en dichos valores de x, pero esto tampoco es suficiente.

Entonces, ¿qué condición se necesita para que g sea continua en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$? Para darle respuesta a la pregunta, identifica los valores de x en los que se satisface que el $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$. Esta condición implica que $g(c)$ está definida y que el $\lim_{x \to c} g(x)$ existe.

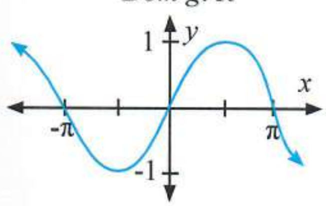
A continuación, determinaremos la continuidad de una función en un punto a partir de la representación algebraica.

Actividad 1.25

Verificar si $g(x) = \text{sen } x$ es continua en $x = 0$.

$g(x) = \text{sen } x$

Dom g: R



Resolución:

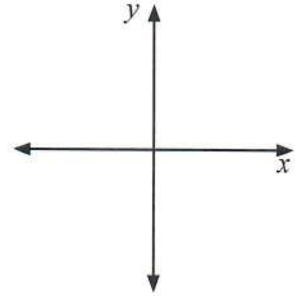
- $g(0) = \text{sen } 0 = 0$, $g(0)$ está definida.
- $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \text{sen } x = \text{sen } 0 = 0$, el límite existe.
- $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

Por lo tanto $g(x)$ es continua en $x = 0$.

Pon a prueba lo aprendido sobre continuidad en un punto.

Actividad 1.26

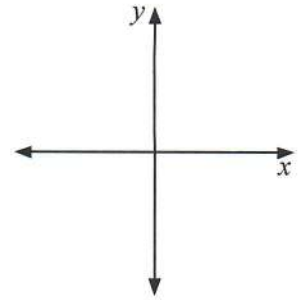
Verificar si $h(x) = x^2 - 2x - 3$ es continua en $x = 4$.



Dom h: __________

Actividad 1.27

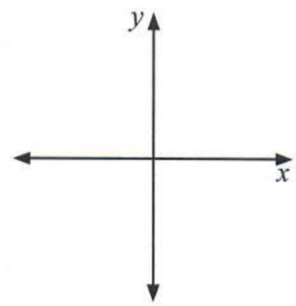
Verificar si $g(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$ es continua en $x = -3$.



Dom g: ___________

Actividad 1.28

Verificar si $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$.



Dom f: ___________

Ejercicios 1.12

1. La función $f(x) = -3$, para $x = 5$, ¿es continua en $x = 5$?
2. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función para que sea continua en un punto?
3. Las funciones polinomiales, ¿son continuas en cada uno de sus puntos?
4. Si se conoce el dominio de una función, ¿es posible determinar si es o no continua en un punto dado?
5. Determina si las siguientes funciones son continuas en $x = -1$. Observa que -1 esté en el dominio de cada una de las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x \neq -1 \\ 4, & x = -1 \end{cases}$ b) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = \begin{cases} 3, & x \geq -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$

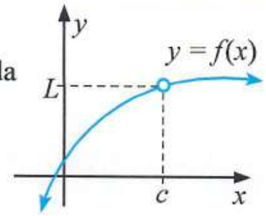
d) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e) $f(x) = \sqrt{x+3}$ f) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

1.3.2 Discontinuidad removible y no removible

Retomando el ejemplo del empresario, él tenía una función discontinua en un punto, y la redefinió para que sea continua, ¿a toda función discontinua en un punto se le puede remover la discontinuidad? Las funciones presentan tres casos de discontinuidad en un punto: evitable (removible), de salto finito y de salto infinito (no removibles).

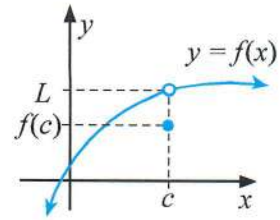
Discontinuidad evitable. Una función f tiene una discontinuidad evitable (removible) en c, si el límite existe, pero $f(c)$ no está definida o su valor no coincide con $f(c)$.

$f(c)$ no está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe



Hay un hueco en $x = c$

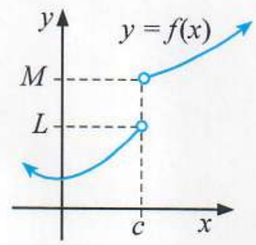
$f(c)$ está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe
$\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$



Hay un hueco y un punto desplazado en $x = c$

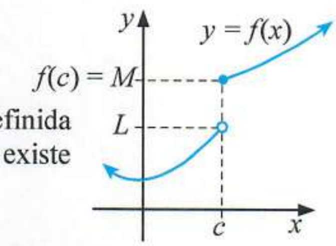
Discontinuidad inevitable de salto finito. Una función f tiene una discontinuidad inevitable (no removible) de salto finito en c, si los límites laterales son diferentes (el límite no existe) esté o no definida $f(c)$.

$f(c)$ no está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe



Hay un salto finito en $x = c$

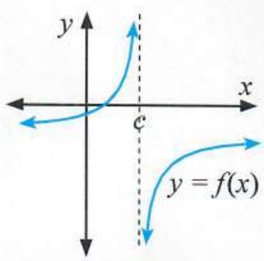
$f(c)$ está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe



Hay un salto finito en $x = c$

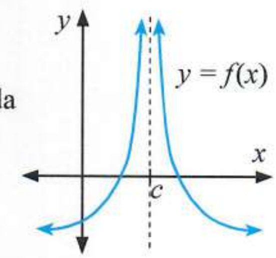
Discontinuidad inevitable de salto infinito. Una función f tiene una discontinuidad inevitable (no removible) de salto infinito en c, si al menos uno de los límites laterales tiende a $+\infty$ o $-\infty$ (el límite no existe).

$f(c)$ no está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe



Hay una asíntota vertical en $x = c$

$f(c)$ no está definida
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe

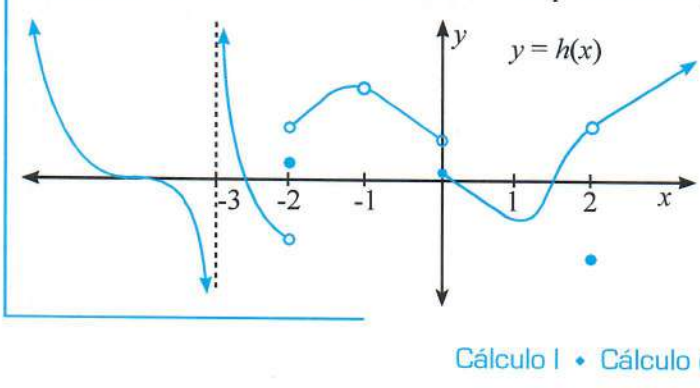


Hay una asíntota vertical en $x = c$

Pongamos en práctica el conocimiento sobre los tipos de discontinuidad de una función.

Actividad 1.29

Identificar los tipos de discontinuidad en la representación gráfica de la función $h(x)$.



Resolución:

La función tiene una:

- discontinuidad ________________ de salto infinito en $x = -3$.
- discontinuidad ________________ de salto finito en $x = -2$ y $x = 0$.
- una discontinuidad ________________ en $x = -1$ y $x = 2$.

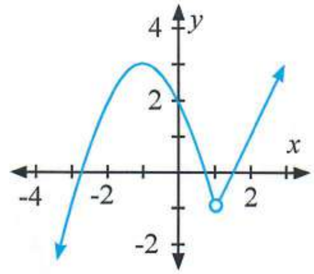
Veamos ahora un ejemplo de una función que tiene una discontinuidad evitable en c.

Ejemplo 27

Verificar si $h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 1 \\ -x^2 - 2x + 2, & x < 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$.

Resolución:

Dom h: $R-\{1\}$



- $h(1)$ no está definida, por lo tanto $h(x)$ es discontinua en $x = 1$.

La función $h(x)$ tiene un hueco en $x = 1$, por lo que la discontinuidad puede ser removida.

- Definamos $h(1) = -1$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = -1$, en consecuencia $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = -1$, el límite existe.
- $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1)$

Para que $h(x)$ sea continua en $x = 1$ se redefine como $h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 1 \\ -x^2 - 2x + 2, & x < 1 \end{cases}$

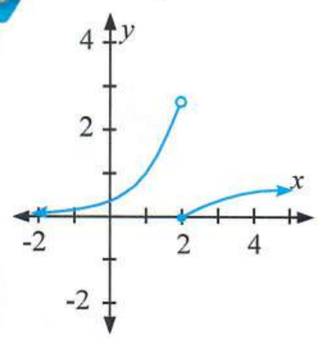
Veamos ahora un ejemplo de una función que tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en c. En este tipo de funciones el límite no existe, en consecuencia son discontinuas en $x = c$.

Ejemplo 28

Verificar si $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 2 \\ \log(x-1), & x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$.

Dom f: R

Resolución:



$f(2) = \log(1) = 0$, $f(2)$ está definida.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = e$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \log(1) = 0$, es decir el $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ en consecuencia el límite no existe.

Por lo tanto $f(x)$ es discontinua en $x = 2$.

Dado que el límite no existe en $x = 2$, la discontinuidad no puede ser removida.

Veamos ahora un ejemplo de una función que tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en c. En este tipo de funciones el límite no existe, en consecuencia son discontinuas en $x = c$.

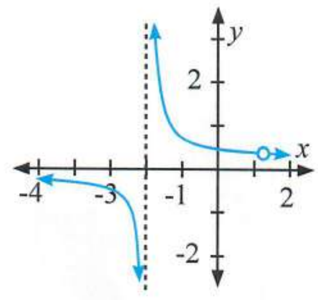
Ejemplo 29

Verificar si $g(x) = \dfrac{3x - 4}{3x^2 + 2x - 8}$ es continua en $x = -2$.

Resolución:

Dom g: $R - \{-2, 4/3\}$

$$g(-2) = \frac{3(-2) - 4}{3(-2)^2 + 2(-2) - 8} = \frac{-10}{12 - 12} = \frac{-10}{0},\ g(-2) \text{ no está definida.}$$



La función $g(x)$ es discontinua en $x = -2$.

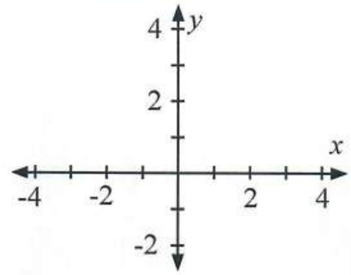
Y como $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$, $g(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$, por lo que la discontinuidad no puede ser removida.

En los ejemplos 28 y 29, el límite de la función no______________ en el valor de x que se estudia la continuidad, por lo tanto, las funciones son ______________ en dicho punto, y la discontinuidad no se puede _________________.

A continuación, pon en práctica lo aprendido sobre continuidad en un punto.

Actividad 1.30

Dom f: ________

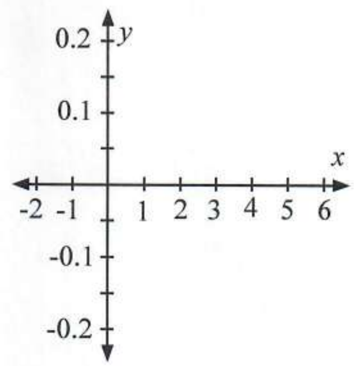


Verificar si $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$.

Resolución:

Actividad 1.31

Dom g: ________

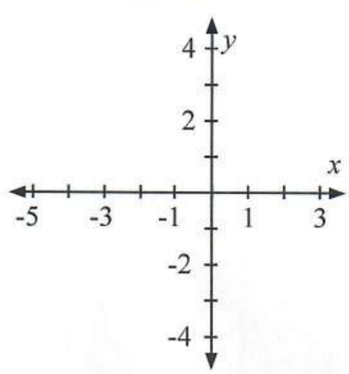


Verificar si $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ es continua en $x = 4$.

Resolución:

Actividad 1.32

Dom h: ________



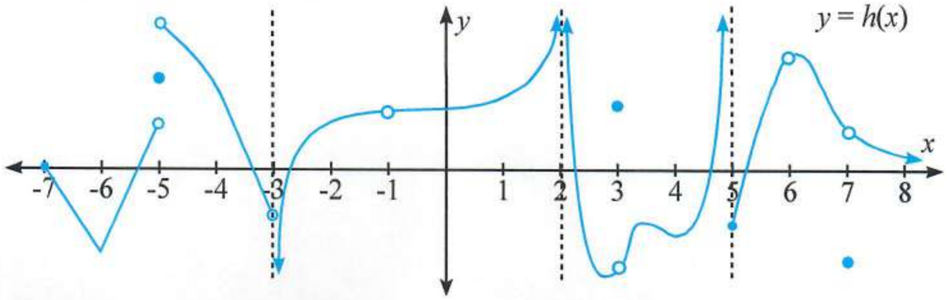
Verificar si $h(x) = \begin{cases} 2(x+3)^2 + 1, & x < -2 \\ -2, & x = -2 \\ -(x+1)^3 - 1, & x > -2 \end{cases}$ es continua en $x = -2$.

Resolución:

Ejercicios 1.13

Unidad 1

1. Con base en la gráfica de h, indica los valores en donde es discontinua y el tipo de discontinuidad que presenta.



2. Dibuja la representación gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:
   a) Su dominio es $(-10, 5]$,
   b) $f(-3) = f(-5) = 5$, $f(2) = -1$, $f(1) = 3$.
   c) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ y $x = 1$.
   d) Tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x = -4$.
   e) Tiene una discontinuidad no evitable de salto finito en $x = 2$.

3. Representa de manera gráfica cada una de las siguientes funciones, luego determina los puntos de discontinuidad, y si es removible, redefine la función para que sea continua.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$ c) $h(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r + 1}$

   d) $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - t}$ e) $g(s) = \dfrac{s+2}{s^2 - 3s - 1}$

4. Verifica si las siguientes funciones son continuas en el valor indicado y si presentan discontinuidad removible o no removible.

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 4 \\ x^2 + 1, & x \geq 4 \end{cases}$, en $x = 4$

   b) $g(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2 - 25}{s + 5}, & s \neq -5 \\ 0\,, & s = -5 \end{cases}$, en $s = -5$

   c) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t^2 + t - 12}, & t \neq -4, 3 \\ 5, & t = 3 \end{cases}$, en $t = -4, 3$.

   d) $f(x) = \begin{cases} -1 - x, & x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$.

1.3.3 Continuidad en un intervalo

La continuidad de una función en un punto se puede generalizar a un intervalo abierto, cerrado o semiabierto.

- Un intervalo abierto es un conjunto continuo de números reales que no contiene sus puntos extremos, y se representa como (a, b), para $a, b \in R$.
- Un intervalo cerrado es un conjunto continuo de números reales que contiene sus puntos extremos, y se representa como $[a, b]$, para $a, b \in R$.
- Un intervalo semiabierto es un conjunto continuo de números reales que contiene solo uno de los puntos extremos, y se representan como $[a, b)$ o $(a, b]$, para $a, b \in R$.

Para que una función sea continua en uno de estos intervalos, debe satisfacer su respectiva definición.

Definición de continuidad en un intervalo abierto

Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en cada punto del intervalo.

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b), y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Definición de continuidad en un intervalo semiabierto

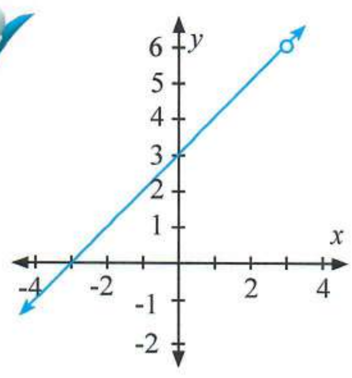
Una función f es continua en un intervalo semiabierto $[a, b)$, si es continua en cada punto de (a, b), y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $(a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b), y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 30

Verificar si $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ es continua en $(-\infty, 3)$.



Resolución:

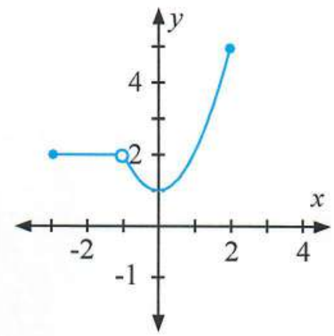
- El dominio de f es $R - \{-3\}$.
- El intervalo $(-\infty, 3) \in Dom\, f$.
- La función f es continua en cada punto del intervalo $(-\infty, 3)$.

Ejemplo 31

Determinar los intervalos en los que $g(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x < -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq -2 \end{cases}$ es continua.

Resolución:

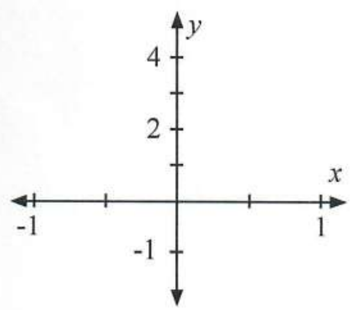
- El dominio de g es $[-3, -1) \cup (-1, 2]$.
- Los intervalos $[-3, -1), (-1, 2] \in Dom\ g$.
- La función g es continua en cada punto de los intervalos $(-3, -1)$ y $(-1, 2)$.
    - Continuidad en $x = -3$. $\quad g(-3) = \lim\limits_{x \to -3^+} 2 = 2$.
    - Continuidad en $x = -1$. $\quad$ g(-1) no está definido, no es continua en $x = -1$.
    - Continuidad en $x = 2$. $\quad g(2) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + 1) = 5$



La función g es continua en los intervalos $[-3, -1)$ y $(-1, 2]$.

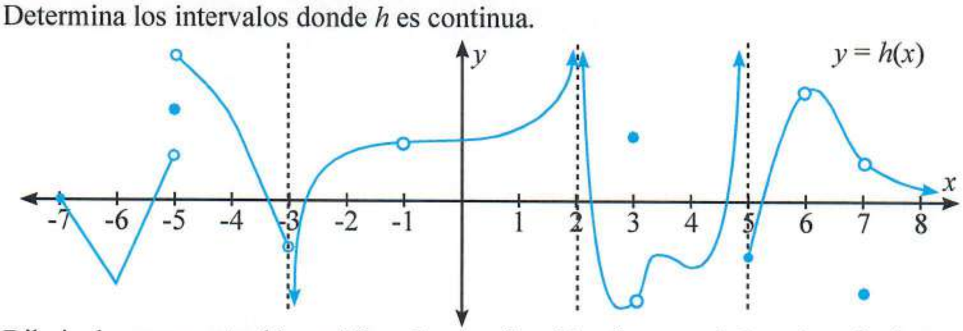
Actividad 1.33

Determinar el intervalo en el que $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ es continua.



Ejercicios 1.14

1. Determina los intervalos donde h es continua.



2. Dibuja la representación gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

   a) Su dominio es $R - \{-3, 1\}$.

   b) Es continua en $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, +\infty)$.

3. Determina los intervalos donde es continua cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$

c) $h(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r + 1}$

d) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 4 \\ x^2 + 1, & x \geq 4 \end{cases}$

Con esto se concluye el tema de las funciones continuas, pero su importancia va más allá de verificar si una función es continua en un punto o en un intervalo, pues, de entre las funciones continuas, en las siguientes unidades se estudian las que son derivables. El concepto de derivada está basado en el del límite, como los veremos en la siguiente unidad.

Producto integrador de la unidad

Resuelve el siguiente problemario y realiza una autoevaluación del aprendizaje logrado.

1. Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y rango.

   a) $f(x) = 4 + \sqrt{x+3}$

   b) $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

2. Usa el método gráfico y numérico para calcular el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$, si existe.

3. Usa el método analítico para calcular el límite de las siguientes funciones.

   a) $\lim\limits_{x \to -4} (x^4 + x^3 - x + 1)$

   b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 5x - 50}{x^2 - 25}$

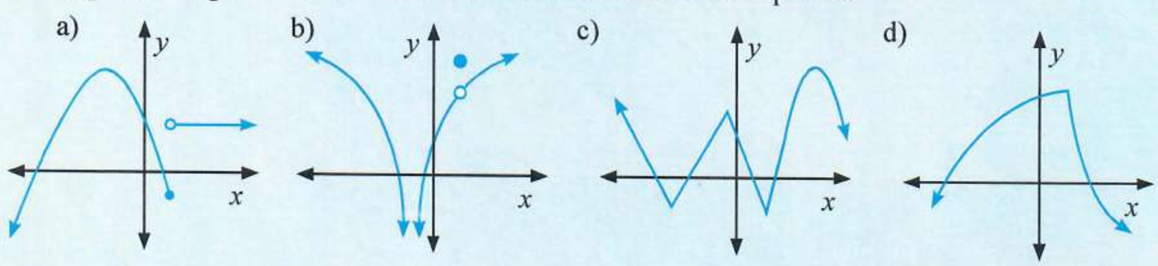
   c) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^3 + 9}$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\tan x}$

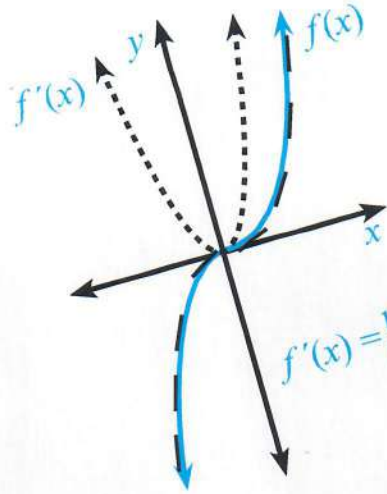
   e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^3 - 11x}$

   f) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}$

4. Explica si la gráfica es continua o discontinua. Justifica tu respuesta.



5. Determina los intervalos de continuidad y los puntos donde la función $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ es discontinua.



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Unidad 2

Aplica las fórmulas básicas de derivación para funciones algebraicas y trascendentes, al cálculo de derivadas a través de diversas técnicas de derivación.

Propósito de la unidad

Atributos de competencias genéricas a evaluar	Criterios de aprendizaje
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	• Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética, integrando saberes de distintas disciplinas del conocimiento.
8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.	• Colabora en equipos de trabajo, compartiendo los logros con el resto de los equipos participantes en un mismo grupo.

Competencias disciplinares extendidas a evaluar	Criterios de aprendizaje
ME2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	• Calcula derivadas de funciones algebraicas y trascendentes aplicando las fórmulas y técnicas de derivación.
ME3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	• Explica el cálculo de la velocidad instantánea y de la aceleración +de un móvil mediante el uso de la primera y segunda derivada.
	• Explica el cálculo de la recta tangente y normal en un punto de una función aplicando la derivada.
ME4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	• Argumenta el cálculo de la derivada de una función aplicando la definición.
ME5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	• Analiza la relación de las variables de razones de cambio relacionadas implícitamente aplicando la derivada.
ME8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	• Interpreta la gráfica de una función y de su derivada para establecer sus relaciones geométricas.

Derivadas: definición, fórmulas y técnicas de derivación

2.1 Concepto y definición de derivada

> **Propósito**
>
> Calcula la derivada de una función mediante la aplicación del límite.

Como **antecedente** para esta unidad, en cursos anteriores vimos la ecuación de la línea recta y su pendiente vista como la razón de cambio en y entre el cambio en x. Así como la definición de recta tangente y secante a una circunferencia.

Recuerda que, la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se define como la razón de cambio $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, donde $\Delta x = x_1 - x_0$ representa el cambio en x, y $\Delta y = y_1 - y_0$ representa el cambio en y. Respecto a la tangente a una circunferencia, esta se define como recta que toca a la circunferencia en un único punto llamado punto de tangencia.

La definición de razón de cambio y de recta tangente son claves para definir el concepto de derivada desde dos contextos diferentes: el problema de la velocidad instantánea y el problema de la recta tangente, a través de los cuales se llega al mismo resultado, el primero desde una interpretación física y el otro desde una interpretación geométrica.

A continuación veremos el problema de la velocidad instantánea, que consiste en determinar la velocidad a la que se desplaza un objeto en un instante de tiempo.

2.1.1 El problema de la velocidad instantánea

El concepto de velocidad es de uso común en la vida cotidiana, aunque la usamos como una magnitud, que en realidad es la rapidez. Sin embargo, en la vida cotidiana no se hace tal distición entre dichos conceptos.

La velocidad no solo se aplica a objetos, personas, animales o cosas en movimiento, como automóviles, aviones, maratonistas, carrera de caballos, velocidad de la luz; sino también en internet, pues siempre se busca una conexión con un ancho de banda que tenga la mayor velocidad posible para la transferencia de datos, la cual se mide en megabits por segundo (Mbps).

Veamos un ejemplo que viven cada día los padres de familia al llevar a sus hijos a la escuela. Ana es una madre de familia, que sale de su casa para llevar a su hijo a la escuela, y debido al tráfico, casi siempre llega tarde. Para evitar eso busca en Google Maps las posibles rutas para dejarlo a tiempo en la escuela. La información que obtiene es la siguiente:

- Ruta 1: Distancia recorrida 6.6 *km*, tiempo del recorrido 18 minutos.
- Ruta 2: Distancia recorrida 6.4 *km*, tiempo del recorrido 17 minutos.
- Ruta 3: Distancia recorrida 6.3 *km*, tiempo del recorrido 22 minutos.
- Ruta 4: Distancia recorrida 6.9 *km*, tiempo del recorrido 19 minutos.

Se da cuenta que la ruta que regularmente usa es la vía más corta, sin embargo, es en la que más tiempo se hace, esto como consecuencia del tráfico en horas pico. Por otra parte, le llama la atención el tiempo que se hace por la ruta 2.

Ana sabe que en cada una de las rutas no se tiene una velocidad constante, pues hay partes en las que avanza más rápido que en otras debido al tráfico, zonas escolares y semáforos, por lo que la velocidad que le marca el velocímetro de su automóvil varía durante su trayectoria; así que le da curiosidad por saber la velocidad a la que debe desplazarse usando los datos que le proporciona Google Maps, divide la **distancia recorrida entre el tiempo del recorrido**, en símbolos

$$\overline{v} = \frac{\textit{distancia recorrida}}{\textit{tiempo del recorrido}}.$$

De acuerdo con la fórmula, la variación en el desplazamiento (cambio de posición) 'Δs' es la _______________ y la variación en el tiempo (cambio en el tiempo) 'Δt' es el _________________.

Para calcular la velocidad, Ana convierte los minutos a horas, debido a que en su velocímetro observa las unidades *km*/*h*. Los resultados que obtiene son:

Ruta 1: $\overline{v} = \dfrac{6.6\ km}{0.3\ h} = 22\ km/h$

Ruta 2: $\overline{v} = \dfrac{6.4\ km}{0.283\ h} = 22.6\ km/h$

Ruta 3: $\overline{v} = \dfrac{6.3\ km}{0.367\ h} = 17.17\ km/h$

Ruta 4: $\overline{v} = \dfrac{6.9\ km}{0.317\ h} = 21.77\ km/h$

Al ver la velocidad a la que se debe desplazar en cada ruta, se da cuenta que no coincide con la realidad. El cálculo de Ana, ¿es correcto o incorrecto?___________ ¿Por qué? ______________

____

____

¿Qué intepretación le das a la velocidad obtenida? ______________________________
____

Ana calculó la **velocidad promedio de cambio** en un intervalo de tiempo, mediante la fórmula $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_f)-s(t_i)}{t_f-t_i}$, donde:

- t_i : es el instante de tiempo inicial, $s(t_i)$: es la posición de un objeto en el instante t_i.
- t_f : es el instante de tiempo final, $s(t_f)$: es la posición de un objeto en el instante t_f.
- Δs es la variación en el cambio de posición de un objeto en la variación de tiempo Δt.

La posición de un objeto es una función que depende del tiempo t, es por ello que se escribe como $s(t)$.

Continuando con el ejemplo de Ana, ella decide explorar la ruta 2, y para tener una idea de la velocidad a la que se desplaza, realiza mediciones del tiempo en tres puntos colineales del recorrido de su casa al primer semáforo. En cuanto a la posición del automóvil en cada medición, la obtiene de Google Maps. El instante de tiempo y la posición obtenidos, son:

Punto de partida:	$t_0 = 0\ min,$	$s(t_0) = 0\ m$
Primera medición:	$t_1 = 3\ min,$	$s(t_1) = 900\ m$
Segunda medición:	$t_2 = 5\ min,$	$s(t_2) = 1300\ m$
Tercera medición:	$t_3 = 6\ min,$	$s(t_3) = 1525\ m$

- De su **casa a la primera medición**, el intervalo de tiempo es [_____, _____]. La velocidad en *km/h,* es
  $$\overline{v}_1=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=$$
- De la **primera medición a la segunda**, el intervalo de tiempo es [____, ____]. La velocidad en km/h, es
  $$\overline{v}_2=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=$$
- De la **segunda medición a la tercera**, el intervalo de tiempo es [____, ____]. La velocidad en *km/h,* es:
  $$\overline{v}_3=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_3)-s(t_2)}{t_3-t_2}=$$

Para calcular $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ y $\overline{v}_3$, se usó la fórmula ______________________, y con ella se calculó la velocidad de cambio ________________ en un intervalo de ______________________.

Regresando con el problema de Ana, ella continúa observando que los velocidades calculadas no corresponden a las que marcaba su velocímetro, ¿por qué? ______________________________
____

Toma en cuenta que, la velocidad promedio de cambio se calcula para un ______________ de tiempo, y cuando Ana ve su velocímetro, lo hace en un ______________________ de tiempo.

Considerando lo anterior, para que la velocidad que calcula Ana y la velocidad que marca su velocímetro coincidan, ¿qué se puede hacer? ______________________________
____
____

Unidad 2

Ana tiene una idea, pues, se le ocurre que, si se reduce el intervalo de tiempo entre cada medición, la velocidad promedio se va aproximando a la velocidad que marca su velocímetro en un instante de tiempo. ¿Es correcta o incorrecta la idea de Ana?______________________________ ¿Por qué?________

____

____

Con los mismos datos, calcula la velocidad promedio de cambio, pero ahora, inicia con el intervalo $[t_0, t_3]$, luego para $[t_0, t_2]$ y por último para $[t_0, t_1]$. Si la longitud del intervalo se reduce cada vez más, ¿a qué valor se aproxima Δt? ____

____

De su **casa a la tercera medición**, el intervalo de tiempo es [____, ____].

La variación en el tiempo se representa como $\Delta t = t_3 - t_0$, donde t_3 se puede expresar como $t_3 = t_0 + \Delta t$, ¿por qué? ____

La variación en el desplazamiento con respecto al tiempo se puede representar como

$$\Delta s = s(t_3) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

La velocidad en *km/h,* es:

$$\overline{v}_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} =$$

De su **casa a la segunda medición**, el intervalo de tiempo es [__, __].

La variación en el tiempo se representa como $\Delta t = t_2 - t_0$, donde t_2 se puede expresar como $t_2 = t_0 + \Delta t$, ¿por qué? ____

La variación en el desplazamiento con respecto al tiempo se representa como

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

La velocidad en *km/h,* es:

$$\overline{v}_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} =$$

De su **casa a la primera medición**, el intervalo de tiempo es [__, __].

La variación en el tiempo se representa como $\Delta t = t_1 - t_0$, donde t_1 se puede expresar como $t_1 = t_0 + \Delta t$, ¿por qué? ____

La variación en el desplazamiento con respecto al tiempo se representa como

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

La velocidad en *km/h,* es:

$$\overline{v}_3 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} =$$

Para calcular las velocidades de cambio promedio $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ y $\overline{v}_3$ en un intervalo de tiempo, se usó la fórmula $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$, que es equivalente a la fórmula $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$, ¿por qué?

____

____

Definición de velocidad de cambio promedio

Sea $s(t)$ la función que proporciona la posición de un objeto en el instante $t = t_0$. Entonces, la velocidad de cambio promedio en un intervalo de tiempo $[t_0\,,\ t_0 + \Delta t]$, donde $\Delta t > 0$, se define como

$$\overline{v} = \frac{\textit{cambio en la posición}}{\textit{cambio en el tiempo}} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Si Ana continúa reduciendo el intervalo de tiempo hasta hacerlo infinitamente pequeño, ¿qué velocidad obtendría? ____. Es decir, cuando el tiempo $t_0 = 0$ minutos, la velocidad que marca su velocímetro es de _____ km/h.

Ahora, si partimos del intervalo $[t_1, t_3]$, el cual se puede escribir como $[t_1, t_1 + \Delta t]$, y si hacemos que $\Delta t \to 0$, se espera que la velocidad que se obtenga sea ________ a la que marca el velocímetro en el instante $t_1 = 3$ minutos.

De igual forma, si partimos del intervalo $[t_2, t_3]$, el cual se puede escribir como $[t_2, t_2 + \Delta t]$, y si hacemos que $\Delta t \to 0$, se espera que la velocidad que se obtenga sea ________ a la que marca el velocímetro en el instante $t_2 = 5$ minutos.

A la velocidad que marca el velocímetro del automóvil de Ana en un instante de tiempo, se le llama velocidad instantánea.

Definición de velocidad instantánea

Sea $s(t)$ la función que proporciona la posición de un objeto en el instante $t = t_0$. Entonces la velocidad instantánea de un objeto en el instante t_0 se define como

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Este límite es la **derivada de la función** posición $s(t)$ en el instante de tiempo $t = t_0$.

Para concluir con el caso de Ana, se tiene que dar respuesta a la pregunta, ¿por qué la velocidad que calcula y la velocidad que marca el velocímetro de su automóvil no coinciden? Esto se debe a que la velocidad de cambio promedio se obtiene para un ___________ de tiempo, y la velocidad instantánea se obtiene para un _______________ de tiempo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1

Una pelota es lanzada hacia arriba, y su posición con respecto al tiempo t está dada por $s(t) = 1 + 3.5t - t^2$, donde s está dada en metros y t en segundos.

Resolución:

a) Determina la velocidad promedio de la pelota en los intervalos [0, 1], [1, 2], [2, 3] y [3, 3.5]

b) Usa los intervalos [2, 3], [2, 2.1], [2, 2.01], [2, 2.001] y [2, 2.0001] para aproximar la velocidad promedio de la pelota a la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ segundos.

c) Determina la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ segundos, y compara el resultado con el inciso b).

Resolución

a) Determinar la velocidad promedio: $\bar{v} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$.

Intervalo de tiempo (segundos)	Velocidad promedio (m/s)
$0 \le t \le 1$	2.5
$1 \le t \le 2$	0.5
$2 \le t \le 3$	-1.5
$3 \le t \le 3.5$	-3.0

$s(0) = 1 + 3.5(0) - (0)^2 = 1$

$s(1) = 1 + 3.5(1) - (1)^2 = 3.5$

$s(2) = 1 + 3.5(2) - (2)^2 = 4$

$s(3) = 1 + 3.5(3) - (3)^2 = 2.5$

$s(3.5) = 1 + 3.5(3.5) - (3.5)^2 = 1$

$$\bar{v} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = \frac{3.5 - 1}{1} = 2.5$$

$$\bar{v} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 3.5}{1} = 0.5$$

$$\bar{v} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{2.5 - 4}{1} = -1.5$$

$$\bar{v} = \frac{s(3.5) - s(3)}{3.5 - 3} = \frac{1 - 2.5}{0.5} = -3$$

La velocidad positiva significa que el desplazamiento de la pelota es creciente “hacia arriba”, y una velocidad negativa significa el desplazamiento es decreciente “hacia abajo” (en el caso de un automóvil, la velocidad negativa significa que se desplaza a la izquierda, y la velocidad positiva significa que se desplaza a la derecha).

b) Aproximar la velocidad promedio de la pelota a la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ segundos.

$s(2.0001) = 1 + 3.5(2.0001) - (2.0001)^2 = 3.99994999$

$s(2.001) = 1 + 3.5(2.001) - (2.001)^2 = 3.999499$

$s(2.01) = 1 + 3.5(2.01) - (2.01)^2 = 3.9949$

$s(2.1) = 1 + 3.5(2.1) - (2.1)^2 = 3.94$

$s(2) = 1 + 3.5(2) - (2)^2 = 4$

$s(3) = 1 + 3.5(3) - (3)^2 = 2.5$

Intervalo de tiempo (segundos)	Velocidad promedio (m/s)
$2 \le t \le 3$	-1.5
$2 \le t \le 2.1$	-0.6
$2 \le t \le 2.01$	-0.51
$2 \le t \le 2.001$	-0.501
$2 \le t \le 2.0001$	-0.5001

$$\bar{v} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{2.5 - 4}{1} = -1.5$$

$$\bar{v} = \frac{s(2.1) - s(2)}{2.1 - 2} = \frac{3.94 - 4}{0.1} = -0.6$$

$$\bar{v} = \frac{s(2.01) - s(2)}{2.01 - 2} = \frac{3.9949 - 4}{0.01} = -0.51$$

$$\bar{v} = \frac{s(2.001) - s(2)}{2.001 - 2} = \frac{3.999499 - 4}{0.001} = -0.501$$

$$\bar{v} = \frac{s(2.0001) - s(2)}{2.0001 - 2} = \frac{3.99994999 - 4}{0.0001} = -0.5001$$

Observa que entre más se reduce el intervalo, la velocidad promedio se aproxima a -0.5 m/s, es decir, en el intervalo [2, 2.0001], la pelota va cayendo a una razón de medio metro por segundo.

c) Determinar la velocidad instantánea $\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ **en el instante $t = 2$ segundos**

$s(2) = 1 + 3.5(2) - (2)^2 = 4$

$s(2 + \Delta t) = 1 + 3.5(2 + \Delta t) - (2 + \Delta t)^2 = 1 + 7 + 3.5\Delta t - 4 - 4\Delta t - (\Delta t)^2 = 4 - 0.5\Delta t - (\Delta t)^2$

$s(2 + \Delta t) - s(2) = 4 - 0.5\Delta t - (\Delta t)^2 - (4) = -0.5\Delta t - (\Delta t)^2$

Unidad 2

$$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\frac{-0.5\,\cancel{\Delta t}-(\Delta t)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}}=-0.5-\Delta t$$

$$\dot{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(-0.5-\Delta t)=-0.5$$

La velocidad instantánea de la pelota en el instante $t = 2$ segundos, es -0.5 m/s.

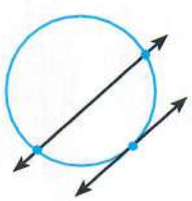
Como conclusión, la velocidad promedio en el intervalo [2, 2.0001] se aproxima al valor de la velocidad instantánea de la pelota en el instante $t = 2$ segundos.

Resolver el problema de la velocidad instantánea, por tanto, significa obtener la derivada de la función posición $s(t)$ en un instante de tiempo t_0. Pero también otra forma de llegar al mismo concepto matemático de derivada de una función es resolviendo el problema de la recta tangente, como veremos a continuación.

2.1.2 El problema de la recta tangente

A través del problema de la velocidad instantánea se llegó a que ésta es la derivada de la función desplazamiento $s(t)$ en el instante $t = t_0$. A continuación, llegaremos a un resultado equivalente resolviendo el problema de la recta tangente, es decir, que la pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de tangencia P de la función $y = f(t)$.

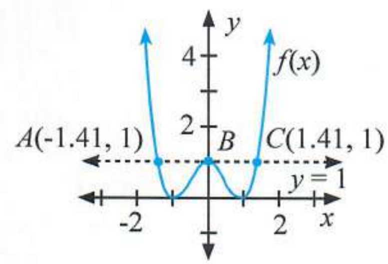
El problema de la recta tangente, consiste en trazar una recta tangente a una curva dada en un punto especifico de ella, para ello, recordemos dos conceptos, el de recta secante y el de recta tangente a una circunferencia.



La recta secante a una circunferencia, es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

La recta tangente a una circunferencia, es la recta que toca a la circunferencia en un punto. Este punto se llama punto de tangencia.

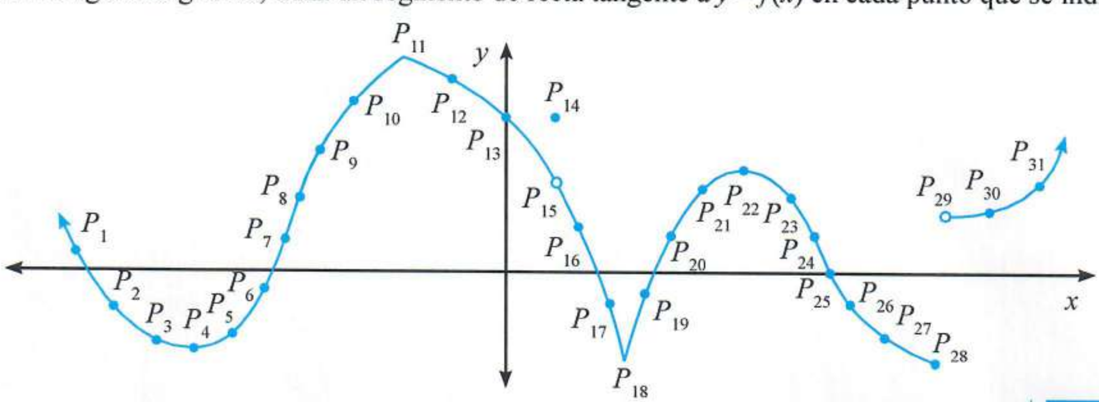
El concepto de recta tangente está definido para una circunferencia, y se requiere extenderlo a un punto de una función.



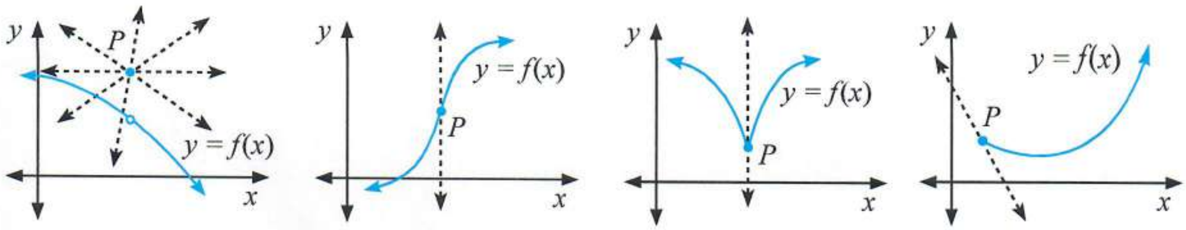
Por ejemplo, la recta $y = 1$ se interseca con la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ en los puntos A (,), B (,) y C (,). La recta $y = 1$, ¿es tangente a f en el punto $B(0, 1)$?____________
¿Por qué?____

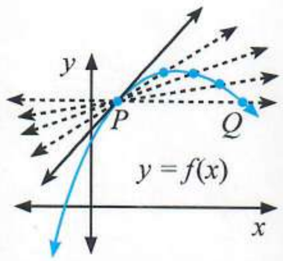
____

En la siguiente gráfica, traza un segmento de recta tangente a $y = f(x)$ en cada punto que se indica.

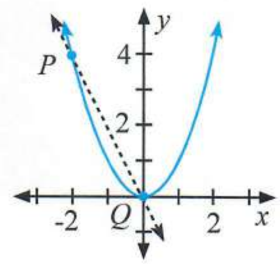


Como podemos ver, hay puntos en los que no se sabe si es posible trazar un segmento de recta tangente. A continuación, se muestran otros casos donde no es posible saber si la recta es tangente en el punto P de $y = f(x)$.

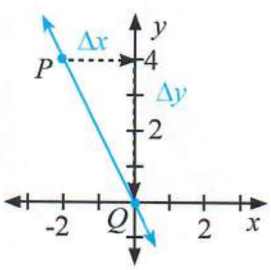




Entonces, ¿cómo trazar una recta que sea tangente? Para ello, partamos de la interpretación gráfica de la familia de rectas secantes a la función f, las cuales tienen un punto P fijo en común, y un punto Q, que se va aproximando por la derecha (también se puede aproximar por la izquierda), hasta coincidir. La recta resultante es la recta tangente en el punto P de la función f.



A continuación, a partir de un caso en particular, mostraremos el proceso para establecer la definición de recta tangente en el punto P de f y su ecuación. Vamos a trazar la recta tangente a $f(x) = x^2$, en el punto $P(-2, 4)$. Para ello, iniciemos con el trazo de la recta secante que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(0, 0)$ de la función. Cuyas coordenadas son: $x_0= -2$, $y_0= 4$, $x_1= 0$, $y_1= 0$.



La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ tiene una variación en x, $\Delta x = x_1 - x_0 =$ ____________

De donde $x_1 = x_0 + \Delta x$, ¿por qué? ____

____

____

Y también, tiene una variación en y, $\Delta y = y_1 - y_0 =$ ____________.
De donde $y_1 = y_0 + \Delta y$, ¿por qué? ____

____

____

____

Recuerda que $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, pues son las imágenes de f evaluadas en x_0 y x_1 respectivamente. Por lo que $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ¿Por qué? ____________________

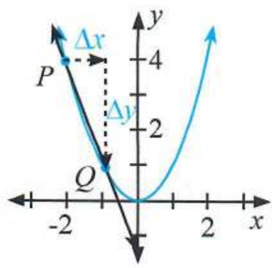
____

____

____

A partir de la variación en x y de y, se tiene la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de $f(x) = x^2$, que es la pendiente de la recta secante.

$$m_{sec} = \frac{\text{cambio en la coordenada } y}{\text{cambio en la coordenada } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$



Ahora, tracemos la recta secante a $f(x) = x^2$, que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(-1, 1)$, de donde $x_0 = -2$, $y_0 = 4$, $x_1 = -1$, $y_1 = 1$.

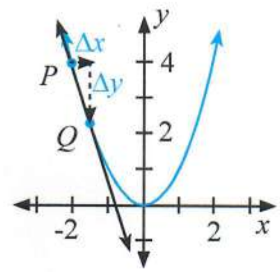
$f(x_0) =$ ________________

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$ ________________

$\Delta x = x_1 - x_0 =$ ________________

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

Luego, tracemos la recta secante a $f(x) = x^2$, que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ de donde $x_0 = -2$, $y_0 = 4$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{9}{4}$.

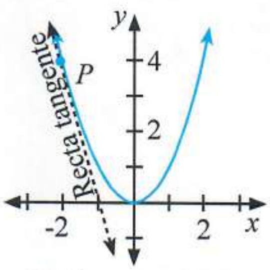


$f(x_0) =$ ________________

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$ ________________

$\Delta x = x_1 - x_0 =$ ________________

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$



Observa que **de una recta secante a otra, Δx se va aproximando a cero**, así que, si continuamos este proceso de tal forma que $\Delta x \to 0$, se tiene la recta que es tangente a $f(x) = x^2$ en el punto $P(-2, 4)$.

Mediante este ejemplo, hemos visto el proceso para trazar una recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$. Por otra parte, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente?

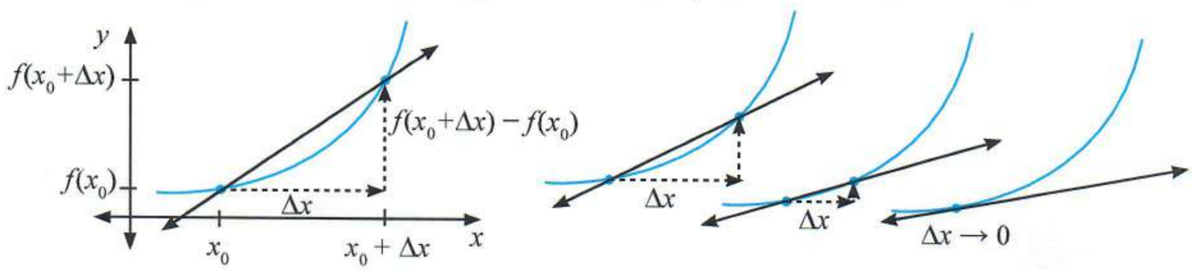
De la recta tangente, se conoce el punto de tangencia $P(x_0, y_0)$, y se puede calcular la pendiente m_{tan}, así que la ecuación a determinar es la punto-pendiente

$$y - y_0 = m_{tan}(x - x_0).$$

Esta ecuación se puede transformar a la **ecuación pendiente ordenada al origen** $y = m_{tan}x + b$, haciendo $b = -m_{tan}x_0 + f(x_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$.

Para obtener la pendiente de la recta tangente m_{tan}, observa que al hacer que $\Delta x \to 0$ en $m_{sec} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

En la siguiente figura, observa el comportamiento de la pendiente de la recta secante.



Unidad 2

De lo anterior, se deduce que la condición que debe satisfacer una recta para que sea tangente a $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$, es que su pendiente sea $m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, y haciendo $h = \Delta x$, se tiene la definición de derivada en un punto.

Definición de derivada de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$

Sea f definida sobre un intervalo abierto que contiene a x_0. La derivada de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$, representada por $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si el límite existe.

Determinemos la **ecuación de la recta tangente**, para ello calculemos la derivada de f en el punto $P(-2, 4)$ de $f(x) = x^2$, es decir, la pendiente $m_{\tan}$ de la recta tangente.

$$f(x_0) = f(-2) = 4$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 = 4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-4\cancel{\Delta x} + (\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} = -4 + \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4$$

Por lo que la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de $P(-2, 4)$ es $f'(-2) = -4$. Observa que $f'(-2) = m_{\tan} = -4$.

Luego, la ordenada al origen es $b = -m_{\tan}x_0 + f(x_0) = -(-4)(-2) + 4 = -4$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto $P(-2, 4)$, es $y = -4x - 4$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$, es

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

siempre que $f'(x_0)$ exista.

Hemos resuelto el problema de la recta tangente y determinado su ecuación, sin embargo, quedan por responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo obtener la representación gráfica de la derivada de f?
- ¿Qué relación hay entre la representación gráfica de f con la de f'?
- ¿En qué casos no existe la derivada de f?
- ¿Cómo determinar la ecuación de la derivada de f?

Para obtener la **representación gráfica de la derivada** de $f(x)$, regresemos al ejemplo de la función $f(x) = x^2$, y determinenos $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

$$f(x_0) = (x_0)^2$$

$$f(x_0 + h) = (x_0)^2 + 2x_0 h + h^2$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0)^2+2x_0\,h+h^2-(x_0)^2=2x_0\,h+h^2$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2\,x_0\cancel{h}+(h)^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=2x_0+h$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

Ahora, usemos $f'(x_0)=2x_0$ y los puntos de tangencia $P_1(-2, 4)$, $P_2(-1, 1)$, $P_3(0, 0)$, $P_4(1, 1)$ y $P_5(2, 4)$, para tabular y graficar la derivada de $f(x)=x^2$.

Gráfica de $f(x)=x^2$ y de las rectas tangentes

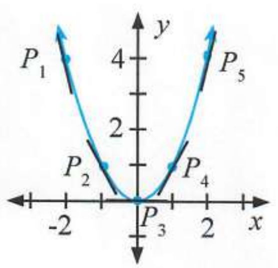
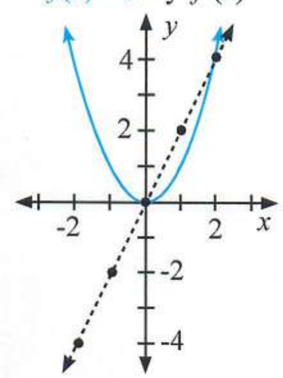


Tabla de las pendientes de las rectas tangentes

x_0	$f'(x_0)=m_{tan}=2x_0$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Gráficas de: $f(x)=x^2$ y $f'(x)$



Observa que la representación gráfica de f' se obtiene al unir los puntos $P(x_0, f'(x_0))$. Es por ello que a la pendiente de la recta tangente m_{tan}, también se le llama derivada de $f(x)$ en el punto de tangencia $P(x_0, f(x_0))$.

Actividad 2.1

Grafica la derivada de la función $f(x)=x$.

$f(x_0)=$

$f(x_0+h)=$

$f(x_0+h)-f(x_0)=$

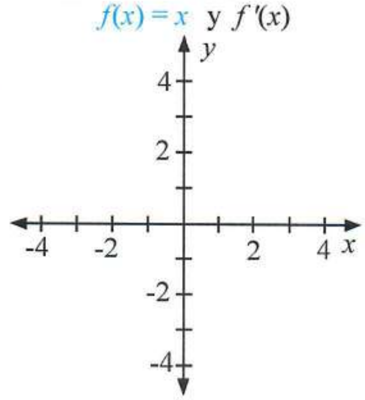
$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

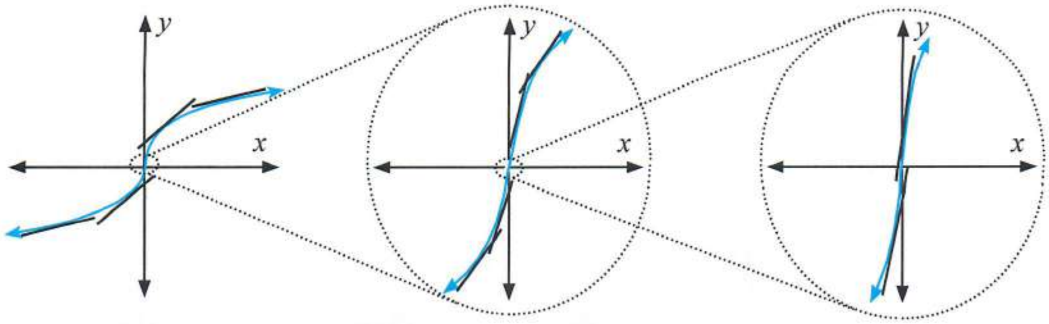
Tabla de la derivada de f en un punto

x_0	$f'(x_0)=m_{tan}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Gráficas de: $f(x)=x$ y $f'(x)$



Con esto hemos dado respuesta a la primera pregunta, es decir, hemos obtenido la representación gráfica de la derivada de f.

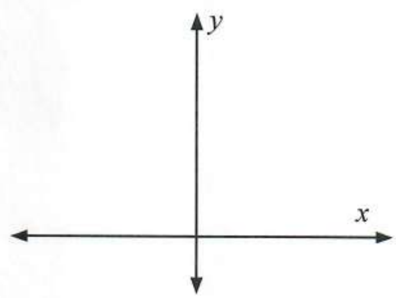


- Exploración por la izquierda. Observa que las pendientes de las rectas tangentes, a medida que se aproximan por la izquierda al punto $P(0, 0)$, su valor se va haciendo infinitamente _______.
- Exploración por la derecha. Observa que las pendientes de las rectas tangentes, a medida que se aproximan por la derecha al punto $P(0, 0)$, su valor se va haciendo infinitamente _______.

De lo anterior, se deduce que el límite $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty$, es decir, el límite no ________________.

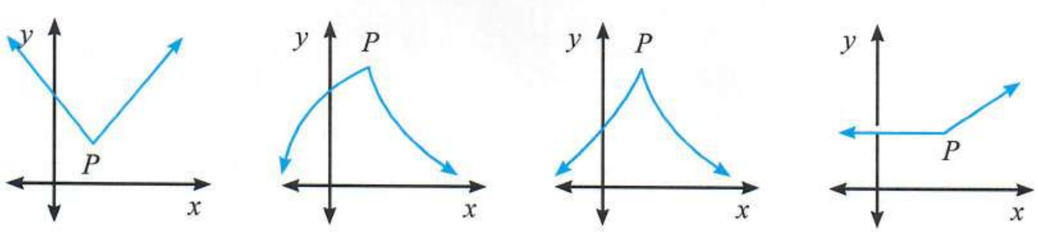
En consecuencia, se dice que ***f* no es derivable en el punto *P*(0, 0)**, es decir, f' no está definida en $x = 0$.

Explora el valor de las pendientes de las rectas tangentes que estan a la izquierda y a la derecha del punto $P(0, 0)$, y usa lo visto en la Actividad 2.1 para esbozar la gráfica de f'.



La representación gráfica resultante debe corresponder a $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$.

Como conclusión de la Actividad 2.4, se tiene que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es **continua en todo punto de su dominio**, sin embargo, **no es derivable** en el punto $P(0, 0)$. Lo mismo pasa cuando en el punto punto P de una función hay una punta o pico, como se muestra a continuación.



Ya vimos que si una función es continua en un punto, no necesariamente es derivable en dicho punto. Ahora veamos que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

> Si la derivada de $f'(x_0)$ existe, entonces f es continua en x_0.

Demostración

Por demostar que $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, para $h \neq 0$.

Dado que $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Por otra parte

$$f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) = h\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) + f(x_0)$$

Aplicando el límite cuando $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left[h\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) + f(x_0)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[h\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)\right] + \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

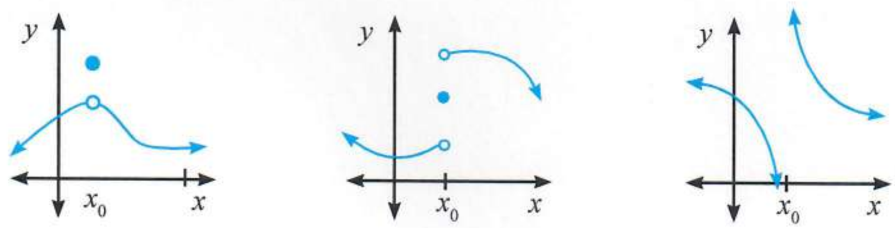
$$= \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) + f(x_0)$$

$$= 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

$$= f(x_0)$$

Por lo tanto, f es continua en x_0. Lo que se quería demostrar.

Del resultado anterior, toda función derivable en un punto es continua en dicho punto. Y si en x_0 existe una discontinuidad, entonces la derivada no existe, como es el caso de las siguientes representaciones gráficas.



Por lo que la derivada no existe, si:

- la función es discontinua en x_0.
- la representación gráfica tiene una punta o pico en $(x_0, f(x_0))$.
- en un punto $(x_0, f(x_0))$ la recta tangente a f es vertical.

Decimos que una función f es derivable en x_0, si $f'(x_0)$ existe. Más aún, para una variable x, **una función es derivable en un intervalo abierto (a, b) de su dominio, si $f'(x)$ existe para cada x** $\in$ **(a, b)**. Cuando es derivable sobre todo el conjunto de los números reales, diremos simplemente que es derivable.

Definición de la derivada de un función f

La función f' definida por la fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

es llamada la derivada de f con respecto a x.
El dominio de f' es el conjunto de todos los valores de x del dominio de f para los cuales el límite existe.

La derivada de una función f tiene diferentes representaciones, como:

$$y', \; f'(x), \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{df(x)}{dx}, \; D_x y$$

De aquí en adelante, por lo general, se utilizarán las dos primeras notaciones.

Por último, para **deteminar la ecuación de la derivada de una función $f(x)$**, se debe usar la regla de los cuatro pasos.

- Paso 1. Calcular $f(x + h)$
- Paso 2. Calcular la diferencia $f(x + h) - f(x)$
- Paso 3. Calcular el cociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Paso 4. Calcular el límite $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

La regla de los cuatro pasos la usamos para calcular la velocidad instantánea y para obtener la pendiente de la recta tangen en un punto de una función.

Regresando al ejemplo de la funcion $f(x) = x^2$, calculemos la ecuación de su derivada.

Ejemplo 2

Determina la ecuación de la derivada de $f(x) = x^2$.

Resolución

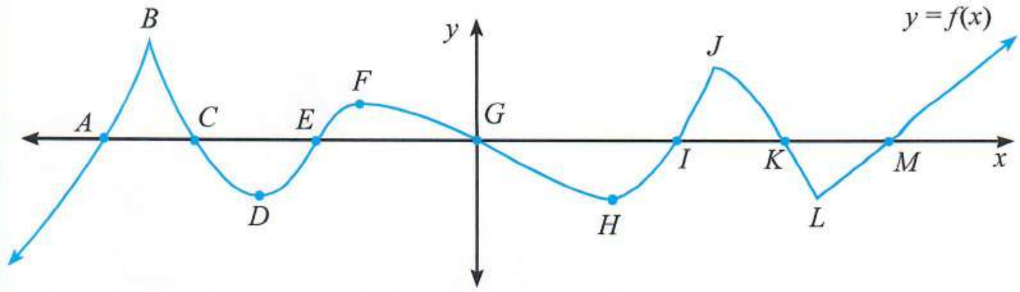
- Paso 1: $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$
- Paso 2: $f(x + h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$
- Paso 3: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$
- Paso 4: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = x^2$, es $f'(x) = 2x$.

Determinar la ecuación de la derivada de una función mediante la regla de los cuatros pasos no es nada práctico, además, se complica para algunas funciones. Existen fórmulas que facilitan el cálculo de la derivada, la cuales se pueden demostrar aplicando la definición de derivada, como veremos en la siguiente sección.

Ejercicios 2.1

1. Observa la siguiente representación gráfica,



Indentifica los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a f es igual a cero, es positiva, es negativa y en los que no está definida (la derivada no existe).

2. Calcula la derivada de las funciones $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ y $h(x) = x^3 + 2x^2 - 5$. Grafica las funciones f', g' y h'. Si a una función le sumas o restas una constante, ¿cambia la representación gráfica de su derivada?

3. Calcula la derivada de la función $h(x) = x^5$, y continúa derivando la función resultante hasta que la derivada sea igual a cero. Cada vez que obtienes la derivada de la función resultante, ¿qué ocurre con el exponente?

2.2 Derivadas de funciones algebraicas

Propósito

Calcula derivadas de funciones algebraicas aplicando las reglas de derivación.

En la sección anterior se estudió el concepto de derivada, cómo interpretar este concepto como pendientes y razones de cambio, así como graficar las derivadas de funciones a partir de sus respectivas gráficas y se ha utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Sin embargo, como ya se expresó, no siempre lo anterior es sencillo de realizar, por lo que en las siguientes secciones estudiaremos reglas de derivación sin tener que acudir a los métodos anteriores y que posibilitan calcular las derivadas de funciones algebraicas y trascendentes.

2.2.1 La derivada de una función constante, del múltiplo de una función y de la potencia de una función

Unidad 2

Si una función $f(x)$ tiene un valor constante k, entonces es derivable y su función derivada es igual a cero, es decir

$$f'(k) = 0$$

Ello es fácil de interpretar pues la pendiente en cualquier punto de un recta paralela al eje de las abscisas es cero. Ejemplos:

a) $f'(0) = 0$ b) $f'(-5) = 0$ c) $f'\left(\sqrt{2}\right) = 0$

Para la función $f(x) = x$, se tiene que $f'(x) = 1$

En efecto, $f'(x) = (x)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

¿Cómo interpretar geométricamente la derivada en este caso?

Si consideramos la función $f(x) = kx$, con k un número real, entonces la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = (kx)' = k(x)' = k$$

De forma más general para la función $g(x) = kf(x)$, donde k es un número real constante, si $f(x)$ es derivable, la función $g(x)$ también lo es y

$$g'(x) = [kf(x)]' = k\,f'(x)$$

Actividad 2.2

Para demostrar esta última regla, analicemos si existe la derivada de $g(x)$ y apliquemos las propiedades de los límites

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[g(x+h)-g(x)]}{h} =$ ____________ $= \lim\limits_{h\to 0} k\, \dfrac{[f(x+h)-f(x)]}{h} = k\cdot$ ____________ $= k\cdot f'(x)$.

Luego existe $g'(x) = [k\,f(x)]' = k\,f'(x)$

Es decir, las constantes pueden extraerse de la operación de derivación.

Ejemplo 3

Derivadas de funciones del tipo $f(x) = kx$.

Resolución

a) Si $y = 3x$, entonces $y' = (3x)' = 3(x)' = 3(1) = 3$

b) Si $f(x) = -\dfrac{x}{3}$, entonces $f'\left(-\dfrac{x}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\,(x)' = -\dfrac{1}{3}$.

Consideremos ahora la función $f(x) = x^2$ y obtengamos su derivada.

$$f'(x) = (x^2)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)(h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)(h) = 2x.$$

Es decir, la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$

Si para la función $f(x) = x^3$ se aplica el mismo procedimiento para obtener su derivada, se obtiene

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

Estos son casos particulares de una regla de derivación que vamos a obtener para una función más general, a saber $f(x) = x^n$, con n un número natural. En ese caso, aplicamos la definición de derivada y

$$f'(x) = (x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad (2.1)$$

Para continuar, utilicemos la descomposición factorial

$$(x+h)^n - x^n = [(x+h) - x]\cdot[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}h^1 + (x+h)^{n-3}h^2 + \dots_{(n\text{ veces})}\dots + (x+h)h^{n-2} + h^{n-1}]$$

La cual es una generalización de los productos notables ya conocidos

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ y}$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$, cuando n toma los valores 2 o 3, $a = x + h$ y $b = x$. En ese caso, sustituyendo en la expresión (2.1), se tiene

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h-x)]\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + (x+h)^2x^{n-2} + x^{n-1}\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + (x+h)^2x^{n-2} + x^{n-1}\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + (x+h)^2x^{n-2} + x^{n-1}\right]\end{aligned}$$

Ahora, aplicamos las propiedades del límite de la suma y producto de funciones; como $h \to 0$, se obtiene

$$(x^n)' = [x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \dots_{(n\text{ veces})}\dots + x\cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$(x^n)' = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots_{(n\text{ veces})}\dots + x^{n-1} + x^{n-1}$$

Es decir, $(x^n)' = nx^{n-1}$

De esta forma obtenemos la regla de la derivada de la función x^n, para cuando n es un entero positivo. Más adelante podremos generalizar esta fórmula para valores más amplios de n.

Ejemplo 4

Calculo de derivada de funciones con expresiones del tipo x^n.

Resolución

a) Si $h(t) = t^6$, entonces $h'(t) = 6t^5$

b) Para $g(s) = \frac{\pi}{2}s^3$ se tiene $g'(s) = \frac{3}{2}\pi s^2$

c) Si $f(x) = (2x)^3$, entonces $f'(x) = [(2x)^3]' = (2^3x^3)' = 8(x^3)' = 8(3x^2) = 24x^2$

Ejercicios 2.2

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x^2$ b) $y(s) = s^{10}$ c) $f(r) = 2\pi r$

   d) $h(x) = 2\sqrt{3}x^4$ e) $g(x) = \left(\frac{5}{3}x\right)^2$ f) $u(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

2. Si una función $f(x)$ está dada por un monomio y su derivada es $f'(x) = 3x^2$, ¿cuál será la expresión de la función $f(x)$?

3. ¿Qué valor debe tener m en la función $f(x) = 2x^m$, si $f'(x) = 8x^3$?

2.2.2 Derivada de la suma o resta de funciones

Hemos visto reglas de derivación para funciones que son monomios, es decir cuyas expresiones algebraicas constan de un solo término. También es posible obtener reglas de derivación cuando consideramos las operaciones con funciones y comenzaremos con la derivada de la suma o resta de funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función $h(x) = f(x) + g(x)$ es derivable y se cumple

$$h'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

En efecto, al aplicar las propiedades de los límites

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

De igual forma si $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces

$$h'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

En términos abreviados se puede escribir $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Esta regla nos permite calcular con facilidad la derivada de una función polinomial, aplicando las reglas estudiadas.

Ejemplo 5

Calculo de derivadas de funciones polinomiales.

Resolución

a) Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, la función derivada es

$$f'(x) = (x^3 - 2x + 3)' = (x^3)' - (2x)' + (3)' = 3x^2 - 2(1) = 3x^2 - 2$$

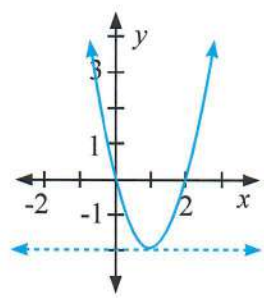
b) Si $f(x) = 8 - 3x^5$, entonces $f'(x) = (8 - 3x^5)' = -3 \cdot 5x^4 = -15x^4$

c) La derivada de $h(x) = 10(3x^2 + 5x - 2)$ es

$$h'(x) = [10(3x^2 + 5x - 2)]' = 10(3x^2 + 5x - 2)' = 10(6x + 5)$$

d) Sea $f(x) = 2x^2 - 4x$. Vamos a hallar en qué punto la tangente a la curva que representa esta función es horizontal.

Sabemos que la derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto determinado $P(x_0, y_0)$.



Por tanto, como $f'(x) = (2x^2 - 4x)' = 4x - 4$ y la pendiente de una recta horizontal es 0, hacemos $f'(x) = 0$, es decir $4x - 4 = 0$, de donde $x = 1$.

Esta es la abscisa x_0 del punto en el cual la tangente es horizontal. Para calcular y_0 sustituimos en la ecuación $f(x) = 2x^2 - 4x$ y obtenemos $y_0 = (2)(1) - 4 = -2$, luego en el punto $P(1,-2)$ la tangente a la parábola que representa esta función es horizontal y la ecuación es $y = -2$.

Ejercicios 2.3

1. Aplica la definición de derivada y las propiedades de los límites para demostrar la regla

$$(f - g)' = f' - g'$$

2. Hallar la derivada de la función $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x + 6$
3. Si las funciones consideradas en cada caso son derivables, halle la función derivada de:

   a) $y = x^3 - 5$

   b) $g(s) = 3s^3 + 2s - 5$

   c) $y = 5x^2 - 2x + 9$

   d) $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x$

   e) $f(x) = 2x^{10} - x^5 + 1$

   f) $h(x) = 100 - 10x^2$

   g) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

   h) $y = (2x)^2 + 3x$

   i) $h(t) = 5(at^2 + bt + c)$

   j) $v(t) = t^m + mt^2 + m$

4. Halle al menos dos expresiones válidas para la función $f(x)$, sabiendo que:

   a) $f'(x) = 2x + 3$ b) $f'(x) = 8x - 5$ c) $f'(x) = 9x^2 - 1/3$

5. ¿Pueden dos funciones distintas tener una misma función derivada? Justifica tu respuesta.
6. Si $f(x) = x^2 - x + \frac{3}{4}$, hallar en qué punto la tangente a la curva que representa esta función es horizontal y representar gráficamente.

Unidad 2

2.2.3 Derivada del producto de funciones

Al considerar el producto de dos funciones f y g, por analogía a lo ya estudiado para la suma y resta de funciones, pudiera pensarse que la derivada del producto de estas dos funciones es igual al producto de las derivadas de cada una de ellas. Sin embargo, el siguiente ejemplo nos muestra que no es así.

Actividad 2.3

Consideremos las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$. Ambas son derivables y la función producto

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^4.$$

La derivada $h'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$ de $h(x)$ es ______________________

Por otra parte la derivada de $f(x) = x^3$ es ________ y la de $g(x) = x$ es ______________

Por lo que el producto de las derivadas $f'(x) \cdot g'(x)$ es ______________________

Compara si son iguales.

Ya hemos comprobado que la derivada del producto de dos funciones no es el producto de las derivadas de cada una de ellas. Tratemos entonces de encontrar una regla que permita calcular la derivada del producto de dos funciones que sean derivables.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables y $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Entonces

$$h'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \to 0}\left[\frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h}\right] = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}\right]$$

Con el objetivo de separar esa expresión en dos, aplicando las propiedades de los límites, y en las que aparezcan las derivadas de cada una de las dos funciones, vamos a sumar y restar en el numerador una misma expresión que de forma conveniente permita obtener en dos expresiones por separado la derivada de cada una de las dos funciones f y g.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0}\left\{\frac{f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)] + g(x)\,[f(x+h) - f(x)]}{h}\right\} \\ &= \lim_{h \to 0}\left\{\frac{f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)]}{h}\right\} + \lim_{h \to 0}\left\{\frac{g(x)\,[f(x+h) - f(x)]}{h}\right\} \end{aligned}$$

Si aplicamos las propiedades de los límites se tiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0}\left[\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}\right] + \lim_{h \to 0}\left[\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}\right] \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) \\ &= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) \\ &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Pues si f y g son derivables, son continuas luego

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$$

Así, podemos concluir que

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f(x)\cdot g'(x) + f(x)'\cdot g(x)$$

Abreviadamente $$[f\cdot g]' = f\cdot g' + f'\cdot g$$

Ejemplo 6

Cálculo de derivadas del producto de funciones.

Resolución

a) Sea $f(x) = (x^2 - 3)^2$, para hallar $f'(x)$ consideramos el producto de los dos binomios

$$f'(x) = [(x^2 - 3)\cdot(x^2 - 3)]' = (x^2 - 3)\cdot 2x + 2x(x^2 - 3) = 4x(x^2 - 3)$$

b) Para $h(x) = x^2(4x + 2)$, $h'(x) = [x^2(4x + 2)]' = x^2(4) + 2x(4x + 2) = 4x^2 + 8x^2 + 4x = 4x(3x + 1)$

c) Hallemos la derivada de $h(x) = x^n(ax + b)$, donde a y b son números reales y n entero positivo.

$$h'(x) = x^n(a) + nx^{n-1}(ax + b) = x^{n-1}(ax + nax + nb) = x^{n-1}[(n + 1)ax + nb]$$

Actividad 2.4

La regla del producto puede aplicarse al producto de más de dos funciones. Por ejemplo, para calcular la derivada del producto de tres funciones se aplica dos veces la regla del producto.

$$[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]' = f(x)[g(x)\cdot h(x)]' + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} + f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$$

$$= f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$$

Para hallar la derivada del producto de tres funciones se aplica sucesivamente en cada uno de los tres sumandos la derivada de una de las funciones por el producto de las otras dos, es decir

$$(fgh)' = fgh' + fg'h + f'gh.$$

Ejercicios 2.4

1. Halla la función derivada de las siguientes funciones

a) $h(t) = 5(at^2 + bt + c)$

b) $y = x^3(2x^2+1)(3x - 2)$

c) $g(s) = (2 - s^2)(s - 2)$

d) $f(t) = t^2(2t + 1)$

e) $h(s) = (4s + 2)^3$

f) $g(x) = (x^4 - 2)(x^2 + 4)$

g) $h(x) = \pi x(\pi x^2 - 1)$

h) $u(t) = (t^2 + 1)(t^2 + t + 1)$

i) $y = (x^4 + 3x)(x^3 - 2x - 1)$

j) $y = x^n(ax + b)$

2. Halla la regla para la derivada del producto de 4 funciones.

2.2.4 Derivada del cociente de funciones

En las reglas de derivación estudiadas hasta el momento hemos considerado que las funciones son derivables, es decir que lo son sobre todo el conjunto de los números reales. Para estudiar la regla correspondiente a la derivada del cociente de dos funciones, hay que tener en cuenta que la función que aparece en el denominador sea diferente de cero y derivable en su dominio.

Para hallar la función derivada del cociente de dos funciones derivables, procedemos análogamente a como se hizo para la regla del producto.

Sea $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x)\neq 0$. Al aplicar la definición de derivada, en este caso, se suma y resta en el numerador la expresión $f(x)\cdot g(x)$ y se obtiene

$$h'(x)=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{g(x)\cdot f(x+h)-g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{g(x)\cdot f(x+h)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right]}{h}$$

Ahora si se aplican las propiedades del producto y cociente de límites

$$h'(x)=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x)\cdot f(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right]-\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right]}{\lim\limits_{h\to 0}\left[g(x+h)\cdot g(x)\right]}$$

$$=\frac{g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x+h)-f(x)]}{h}-f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[g(x+h)-g(x)]}{h}}{g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)}$$

$$=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

Y por tanto la regla para la derivada de un cociente de dos funciones resulta

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0$$

En forma abreviada

$$\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2},\ g(x)\neq 0$$

Ejemplo 7

Cálculo de derivadas del cociente de funciones.

Resolución

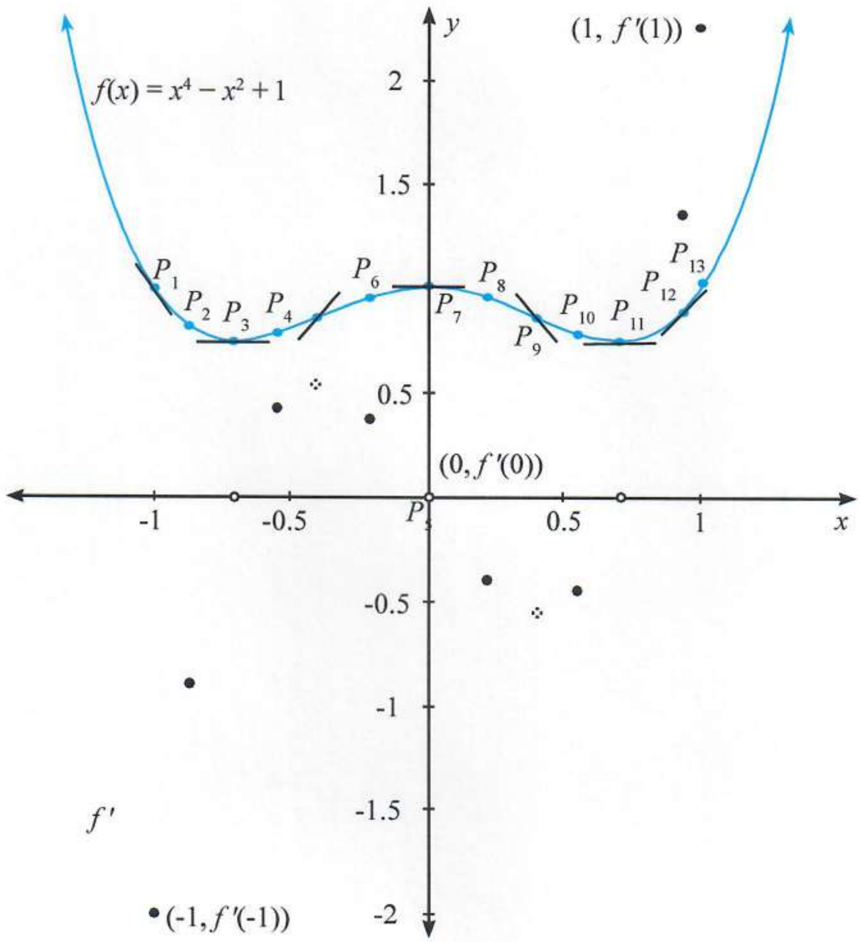
1. Si $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, con $x\neq 1$, entonces $h'(x)=\dfrac{(1)(x-1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$
2. La derivada de $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-1}$, $x\neq\dfrac{1}{2}$, es

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\,(2x-1)-(x^2-3x+4)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{(4x^2-6x-2x+3)-(2x^2-6x+8)}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-5}{(2x-1)^2}$$

A continuación, veamos la **relación que hay entre la representación gráfica de f con la de f'**.

Actividad 2.5

En la siguiente representación gráfica se trazan rectas tangentes a $f = x^4 - x^2 + 1$ en los puntos indicados, y se grafican algunos puntos $P(x_0, f'(x_0))$, donde $f'(x_0) = m_{\tan}$.



a) Une los puntos •, ○, ○. Cada punto representa las coordenadas $(x_0, f'(x_0))$, por lo tanto, la gráfica trazada representa a la _____________ de f, la cual se representa con el símbolo f'.

b) En la gráfica de f, en que puntos de tangencia $P(x_0, f(x_0))$, las **rectas tangentes** tienen:
- pendiente positiva (recta creciente): ____________________
- pendiente negativa (recta decreciente): ____________________
- pendiente igual a cero (recta horizontal): ____________________

c) Identifica los intervalos donde la pendiente de f es negativa, en esos mismos intervalos, ¿cuál es el signo de f'? ____________________

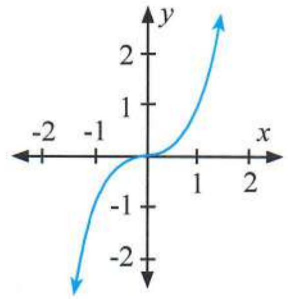
d) Identifica los intervalos donde la pendiente de f es positiva, en esos mismos intervalos, ¿cuál es el signo de f'? ____________________

Veamos un ejemplo en el que en un punto donde cambia la forma de la curva, la recta tangente tiene pendiente igual a cero.

Actividad 2.6

Determina la derivada en el punto $P(0, 0)$ de $f(x) = x^3$, si existe. Luego esboza la gráfica de f'.

Del punto de tangencia: $x_0 = 0$, $f(0) = 0$



$f(0 + h) =$

$f(0 + h) - f(0) =$

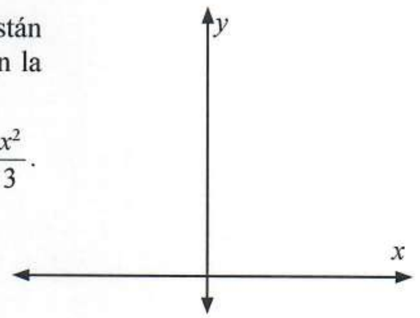
$\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

La derivada en el punto $P(0, 0)$ de $f(x) = x^3$, es $f'(0) =$ _______.

Explora el valor de las pendientes de las rectas tangentes que están a la izquierda y a la derecha del punto $P(0, 0)$, y usa lo visto en la Actividad 2.1 para esbozar la gráfica de f'.

La representación gráfica resultante debe corresponder a $f'(x) = \dfrac{x^2}{3}$.



Veamos un **caso en el que no existe la derivada de *f***, en un punto en el que puede haber una recta tangente vertical, y como ya sabemos, para esta recta no está definida la pendiente.

Actividad 2.7

Determina la derivada en el punto $P(0, 0)$ de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, si existe. Luego esboza la gráfica de f'.

Del punto de tangencia: $x_0 = 0$, $f(0) = 0$

$f(0 + h) =$

$f(0 + h) - f(0) =$

$\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

Como resultado se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{1}{0}$. Por lo que hay que explorar las pendientes de las rectas tangentes próximas al punto $P(0, 0)$.

Ya hemos demostrado anteriormente una regla para la derivada de la función x^n, cuando n es un número entero positivo. Apliquemos ahora la regla del cociente para investigar qué pasa cuando consideramos el exponente un número entero negativo.

Actividad 2.8

Sea $h(x) = x^m$, con m un número entero negativo. Siempre podemos encontrar un número n entero positivo, tal que $n = -m$.

Entonces se tiene $h(x) = x^m = x^{-n} =$ ______, con n entero positivo.

Apliquemos ahora la regla de la derivada del cociente de funciones a la función obtenida

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \qquad\qquad = (\qquad\qquad)\cdot x^{-2n} = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}$$

Por tanto, $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$ sea n un número entero positivo o negativo.

De hecho, este resultado también es válido cuando n es un número racional, lo cual demostraremos más adelante en esta unidad. Es decir,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ n \text{ un número racional}$$

Así, tendremos, por ejemplo, que

$$(x^{-2})' = -2x^{-3} \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicios 2.5

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones, aplicando las reglas de derivación estudiadas

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-3}$

c) $g(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$

d) $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

e) $h(x) = \dfrac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-1}{x}$

f) $y = 1 - \left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right]$

g) $h(t) = \dfrac{t^2+4}{2t^3-1}$

h) $v(t) = (2t+1)^3$

i) $y = \sqrt{4x} + 4\sqrt{x}$

j) $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$

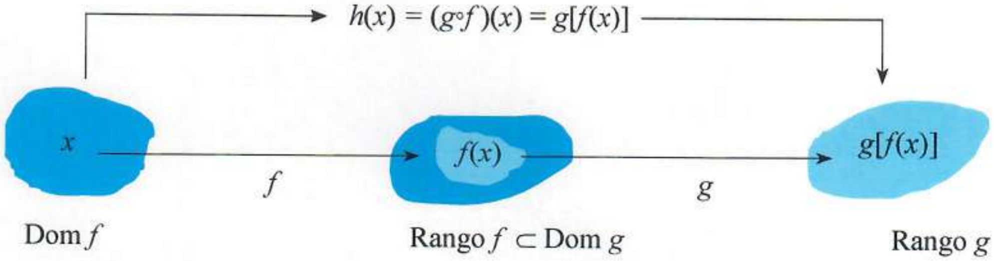
k) $f(x) = \dfrac{x-3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

l) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2}$

2. Si $h(x) = \sqrt{x}\cdot f(x)$ y se sabe que $h(1) = 6$ y $h'(1) = 6$, halla el valor de $f'(1)$.

2.2.5 La derivada de funciones compuestas: regla de la cadena

Recordemos el concepto ya estudiado de una función compuesta. Si consideramos por ejemplo la función $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, esta puede considerarse como que se aplica en primer lugar $f(x) = x^2 - 1$, y posteriormente la función $g(s) = \sqrt{s}$, con $s = f(x) = x^2 - 1$, para lo cual debe cumplirse $s \geq 0$ y por tanto $x^2 - 1 \geq 0$, para que la función g tenga sentido. En ese caso hablamos de $h(x)$ como la función compuesta de g con f y se escribe $(g \circ f)(x)$ o $g[f(x)]$.



De manera general, sean f y g dos funciones algebraicas o trascendentes tales que el Rango de f está contenido en el Dominio de g, es decir Rango $f \subset$ Dom g. En ese caso es posible hablar de la función compuesta $(g \circ f)(x)$ al evaluar la función g en la imagen de x por f y se tiene

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \quad \text{donde} \quad (g \circ f) : \text{Dom} f \to \text{Rango } g$$

Cuando estudiamos la regla de la derivada del producto de dos funciones vimos que este no es igual al producto de las derivadas de cada una de ellas. Como veremos la derivada de la función compuesta sí es el producto de las derivadas de cada una de las funciones; solo que, hay que tener en cuenta dónde se evalúa cada función derivada.

Vamos a partir de un ejemplo para buscar una regla para la derivada de una función compuesta. Para ello tomemos la función $h(x) = (x^2 + 1)^2$, la que podemos considerar que se obtiene a partir de la composición de las dos funciones $g(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 1$, es decir $h(x) = g[f(x)]$. Obtengamos la derivada de $h(x)$ a partir de la derivada de un producto de funciones, es decir el producto $(x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)$. Entonces

$$h'(x) = [(x^2 + 1)^2]' = [(x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)]' = 2x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(2x) = 4x(x^2 + 1)$$

Si consideramos ahora la función $g(x) = (x^2 + 1)^3$ y aplicamos nuevamente la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= [(x^2 + 1)^3]' = [(x^2 + 1)^2\cdot(x^2 + 1)]' = (x^2 + 1)^2\cdot(2x) + [(x^2 + 1)^2]'\cdot(x^2 + 1) \\ &= 2x(x^2 + 1)^2 + [4x(x^2 + 1)]\cdot(x^2 + 1) = 2x(x^2 + 1)^2 + 4x(x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Análogamente, para $k(x) = [(x^2 + 1)^4]$ obtenemos $k'(x) = [(x^2 + 1)^4]' = 8x(x^2 + 1)^3 = 4(2x)\cdot(x^2 + 1)^3$.

Analicemos los resultados obtenidos

$$\begin{aligned} h'(x) &= [(x^2 + 1)^2]' = 4x(x^2 + 1) = 2(2x)\cdot(x^2 + 1) \\ g'(x) &= [(x^2 + 1)^3]' = 6x(x^2 + 1)^2 = 3(2x)\cdot(x^2 + 1)^2 \\ k'(x) &= [(x^2 + 1)^4]' = 8x(x^2 + 1)^3 = 4(2x)\cdot(x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

Ello sugiere que $[(x^2 + 1)^n]' = n(x^2 + 1)'\cdot(x^2 + 1)^{n-1}$, y si asociamos esta expresión con la derivada de la función x^n, entonces $[(x^2 + 1)^n]' = (x^2 + 1)'\cdot[(x^2 + 1)^n]'$.

Como se puede apreciar la derivada de la función $h(x) = (x^2 + 1)^2$ se obtuvo como el producto de las derivadas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(s) = s^2$, con $s = f(x) = x^2 + 1$.

Sin embargo, no siempre es posible esta vía utilizada. Por ejemplo, basta considerar, en el ejemplo anterior, en lugar de $g(s) = s^2$, la función $g(x) = \sqrt{x}$ y la función compuesta es

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{x^2 + 1}$$

Para hallar la derivada de la función compuesta $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ no es posible aplicar la regla del producto ni ninguna de las estudiadas hasta el momento, pero los ejemplos anteriores sugieren, como resultado, una expresión en la que estén las derivadas de las funciones que originan la función compuesta. Por ello, basados en ese resultado, vamos a buscar una expresión que permita hallar la derivada de una función compuesta en general.

Sea $f(x)$ una función derivable en x y $g(x)$ una función derivable en $f(x)$. Consideremos la función compuesta $g[f(x)]$ y de acuerdo con la definición de derivada

$$\begin{aligned}[g(f(x))]' &= \lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)] \cdot [f(x+h) - f(x)]}{[f(x+h) - f(x)] \cdot h}\end{aligned}$$

Como se observa, se ha multiplicado y dividido por una expresión conveniente, $[f(x + h) - f(x)]$, ya que como sugieren los ejemplos vistos anteriormente, en los resultados está la derivada de la función f.

Nota que para ello es requisito que $f(x + h) - f(x) \neq 0$, y vamos a suponer de aquí en adelante que $f(x + h) \neq f(x)$, aunque esto no siempre se cumple, como, por ejemplo, para la función constante $f(x) = c$, $f(x + h) = f(x) = c$, para cualquier valor de h. Partiendo de esta restricción entonces tendremos que para valores pequeños de h, $f(x + h) \neq f(x)$, luego es válido multiplicar y dividir por $[f(x+h)-f(x)]$. Como f es derivable, es continua y por tanto $[f(x + h) - f(x)] \to 0$, cuando $h \to 0$. En ese caso, aplicando las propiedades de los límites y haciendo $k = f(x + h) - f(x)$

$$[g(f(x))]' = \lim_{h \to 0} \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{g[f(x) + k] - g[f(x)]}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Una demostración más detallada en cursos avanzados de cálculo permite obtener el mismo resultado sin necesidad de la restricción anterior.

Ahora podemos enunciar, en general, la regla para la derivada de una función compuesta o regla de la cadena. Si f es derivable en x y g en $f(x)$, entonces la función compuesta definida mediante $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, es derivable en x, y

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Se denomina regla de la cadena ya que es el producto de la derivada de la primera función evaluada en la segunda, por la derivada de la segunda función. En símbolos

$$(g \circ f)' = g'[f] \cdot f'$$

De igual forma si f es derivable en x, g en $f(x)$ y h en $g[f(x)]$, entonces

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g[f(x)]) \cdot g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Unidad 2

Ejemplo 8

Cálculo de derivadas de funciones compuestas.

a) Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(s) = (s + 3)^3$, la función compuesta es $(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \left(\sqrt{x} + 3\right)^3$ y

$$(g\circ f)'(x) = 3\left(\sqrt{x} + 3\right)^2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{3\left(\sqrt{x}+3\right)^2}{2\sqrt{x}}$$

b) La función $h(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)^2}$ es la composición de $f(s) = \sqrt[3]{s^2}$ y $s = g(x) = x^2 - 2$.

Entonces $h'(x) = \dfrac{2}{3}(x^2-2)^{-1/3}\ (2x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-2}}$

c) Sean $h(u) = \sqrt[3]{u}, u(s) = s^2 + 1, s(x) = \sqrt{x} - 2$, entonces $h[u(s(x))] = \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + 1}$ y

$$(h[u(s(x))])' = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + 1\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[2\left(\sqrt{x}-2\right)\right]\left[\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{3\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-2\right)^2+1}}$$

Actividad 2.9

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 4$. Vamos a calcular la derivada de $g\circ f$.

$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] =$ _______________. Luego la derivada $(g\circ f)'(x) =$ ____________.

Ahora, calculemos $(f\circ g)(x)$ y su derivada

$(f\circ g)(x) =$ _________________________, entonces $(f\circ g)'(x) =$ _________________________.

Compara ambos resultados. ¿A qué conclusión llegas?

Ejercicios 2.6

1. Halla la derivada de la función $f(x) = (x^2 - 3)^2$ como función compuesta y como producto de funciones. Compara.
2. Demuestra la regla para la derivada de la composición de tres funciones, es decir, que su derivada es la derivada de la primera función evaluada en la composición de las dos restantes, por la derivada de la segunda evaluada en la tercera, por la derivada de la tercera.

$$(h\circ g\circ f)' = h'(g[f])\cdot g'[f]\cdot f'$$

3. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$, y $g(x) = \sqrt{x}$, halla la derivada de $f\circ g$ y de $g\circ f$
4. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = (x^2 - a^2)^5$

b) $h(s) = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$

c) $g(x) = [1 + (x)^{1/2}]^{1/2}$

d) $y = (3x^2 - 5x + 1)^{20}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^4+1}\right)^9$

f) $h(x) = \dfrac{x^3(1-x)^2}{x+1}$

g) $y = \dfrac{s^2}{\sqrt{4-s^2}}$

h) $f(x) = (x-2)\sqrt{x^2-2x+1}$

i) $g(x) = \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

En lo estudiado hasta el momento, en el cálculo de derivadas, hemos partido de funciones algebraicas que son derivables en todo el eje real y, al aplicar las reglas de derivación, se obtiene una función, la función derivada, que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en cualquiera de sus puntos en los que es derivable.

Podemos, entonces, plantearnos calcular el valor de la derivada de una función en un punto específico de su dominio en la que esta sea derivable. En ese caso, estaremos obteniendo la pendiente de la recta tangente a la curva que representa esa función en el punto dado. Para ello, evaluamos la función derivada en dicho punto.

Ejemplo 9

Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, hallemos la ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, 2)$ y para ello calculemos su derivada en $x_0 = 2$.

$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)' = 3x^2 - 4x$, y para $x = 2$, se tiene

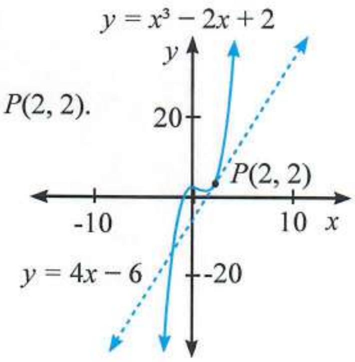
$f'(2) = (3)(2^2) - (2)(2^2) = 12 - 8 = 4$.

Así, hemos hallado el valor de la pendiente de la tangente en el punto $P(2, 2)$.

Ahora podemos hallar la ecuación de la recta tangente en ese punto a partir de la expresión $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Sustituyendo se obtiene $y - 2 = 4(x - 2)$, o sea $y = 4x - 6$.

Por tanto $y = 4x - 6$, es la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x^2 + 2$, en el punto $P(2, 2)$, como se muestra en la gráfica siguiente.



Ejercicios 2.7

1. Hallar $f'(0)$ si

   a) $f(x) = \frac{1}{5}(2x^5 - 5)$ b) $f(x) = \frac{2x^3 - x}{3}$ c) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

2. Calcular el valor de la derivada, en los puntos dados, para la función

   a) $g(x) = x^2 - \frac{4}{x}$, en $P(1, 3)$

   b) $s(t) = (t - 1)^2$, en $P(0, 1)$

   c) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$, en $P(1, 2)$

3. Halla en qué puntos de $y = \frac{2x^2}{x - 1}$, la recta tangente es horizontal. ¿Cuál es la expresión algebraica de estas tangentes?

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva.

   a) $y = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$ en el punto $P(-1, 1)$

   b) $y = x^2 + 2x - 8$ en el punto $P(0, -8)$

2.2.6 La derivada de funciones implícitas

A diferencia de la función $y = 2x + 1$, en la que aparece de forma explícita la relación entre la variable independiente y la dependiente, en una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$, esto no ocurre y la relación está de forma implícita. De hecho, al resolver esta ecuación obtenemos, como solución, dos relaciones entre x y y, que son $y = \sqrt{1-x^2}$, así como $y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$.

Vamos a considerar a continuación la ecuación $y^3 + 2y^2 - y + x^2 = 2$. Siendo y una función de x, es decir $y = f(x)$. Esta ecuación se puede escribir

$$[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - f(x) + x^2 = 2$$

Pero vamos a calcular la derivada de $y = f(x)$, suponiendo que es una función derivable, sin ocuparnos en tratar de despejar inicialmente $y = f(x)$ en dicha ecuación. Para ello utilizamos la regla de la cadena. En efecto, si derivamos en ambos miembros de la ecuación

$$(y^3 + 2y^2 - y + x^2)' = (2)'$$

$$(y^3)' + 2(y^2)' - y' + 2x = 0$$

$$3y^2 \cdot y' + 4y \cdot y' - y' + 2x = 0$$

$$y'(3y^2 + 4y - 1) + 2x = 0$$

Si ahora despejamos y' en dicha ecuación

$$y' = \frac{-2x}{3y^2 + 4y - 1} \tag{2.2}$$

Así, hemos obtenido una expresión para la derivada de la función $y = f(x)$.

Observa que en la expresión de la derecha de dicha igualdad aparece, en el denominador, la expresión genérica de la función $y = f(x)$.

Si en particular, en el ejemplo anterior $y = f(x) = 3x + 1$, la expresión (2.2) estará dada por

$$y' = \frac{-2x}{3(3x+1)^2 + 4(3x+1) - 1} = \frac{-2x}{3(3x+1)^2 + 12x + 3}$$

Este proceso de derivar en ambos lados de una ecuación con respecto a la variable independiente, sin buscar previamente la relación explícita de la función con la variable independiente se denomina **derivación implícita**.

Ejemplo 10

Cálculo de derivadas de funciones implícitas.

1. Sea la ecuación $xy - x - 3y + 1 = 0$, donde y es derivable y función de x, es decir $y = f(x)$. Derivemos respecto a x en cada miembro de la ecuación aplicando la regla de la cadena

$$(xy - x - 3y + 1)' = 0'$$

Por tanto, $(xy - x - 3y + 1)' = (xy)' - 1 - 3y' = y + xy' - 1 - 3y' = 0$. Si ahora despejamos y'

$$y' = \frac{1-y}{x-3}$$

Ahora podríamos dejar la expresión de la derivada sólo en términos de x. Si en la ecuación $xy - x - 3y + 1 = 0$ despejamos y como función de x, se tiene que $y = \dfrac{x-1}{x-3}$, luego

$$y' = \frac{1-y}{x-3} = \frac{1 - \dfrac{x-1}{x-3}}{x-3} = -\frac{2}{(x-3)^2}$$

2. Dada la ecuación $y^2 + xy - xy^2 + x^2 = 0$, si derivamos en forma implícita

$$0 = (y^2 + xy - xy^2 + x^2)' = 2y \cdot y' + y + xy' - y^2 - xy \cdot y' + 2x = y'(2y + x - xy) + y - y^2 + 2x$$

Si se despeja y' obtenemos $y' = \dfrac{y^2 - y - 2x}{2y - xy + x}$

Dicha expresión para la derivada es mucho más difícil de obtener despejando y como función de x, para derivar a continuación.

3. Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 = 16$. Al derivar implícitamente, se obtiene $2x + 2y \cdot y' = 0$, de donde $y' = -\dfrac{x}{y}$

Si nos proponemos obtener la expresión de la derivada en términos de x, al despejar y en la ecuación resultan dos funciones $y = f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, así como $y = g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ y ambas son derivables para $-4 < x < 4$.

$$\text{Por tanto } y' = -\frac{x}{y} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}, & \text{si } y = f(x) \text{ con } -4 < x < 4 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}, & \text{si } y = g(x) \text{ con } -4 < x < 4 \end{cases}$$

Ejercicios 2.8

1. Comprobar que para la función del Ejemplo 10, inciso 1, se obtiene la misma función derivada aplicando la regla del cociente, una vez despejada y en función de x.
2. Si $y = f(x)$ halla la derivada de y en
   a) $(3y + 2)^3 = x$ b) $x^3 + y^3 = xy$
   c) $x^2 + 3y^3 = x + 5$ d) $2x^4y^2 - 6xy^3 = 4 - 8y$
3. Halla y' por derivación implícita en $x^3y^3 - y - x = 0$, evalúa la derivada en $x_0 = 0$ y halla la ecuación de la recta tangente en el punto $P(0, 0)$.
4. Calcula la derivada de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ y halla las ecuaciones de las tangentes a dicha ecuación en los puntos $P(9, 4)$ y $Q(4, 9)$. Representa gráficamente.

Aplicando la derivación implícita vamos a continuar ampliando la regla de la derivada para la función potencia x^n, considerando ahora n un número racional.

Sea $y = x^n$, con $x > 0$ y n un número racional cualquiera. Entonces también se cumple

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Como n es racional, lo escribimos en la forma $n = \frac{p}{q}, p > 0, q \neq 0$. Entonces $y = x^n = x^{\frac{p}{q}}$ de donde $y^q = x^p$

Así, derivando implícitamente y aplicando la regla de la cadena, como q es un número entero $(y^q)' = (x^p)'$ de donde $q\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} \cdot y' = px^{p-1}$, por lo que

$$y' = \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{pq-p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}$$

Como se quería demostrar, siendo n un número racional. De hecho, esta propiedad también es válida cuando el exponente es un número real, como se demostrará en la sección 2.3.4 al estudiar la derivada de una función logarítmica.

2.2.7 Derivadas de orden superior

Al obtener la derivada de una función derivable f se obtiene otra función f', la que también puede ser derivable en su dominio. En ese caso podemos obtener la derivada de la función derivada, la que denotaremos f'' y cuyo dominio se compone de todos los puntos en los que f' es derivable. A esta nueva función la llamaremos segunda derivada de la función f.

Un ejemplo muy simple puede ser la función $f(x) = x^3$, para la cual $f'(x) = 3x^2$, que como sabemos es derivable y en ese caso se obtiene la función $f''(x) = 6x$.

De igual forma se podrían obtener las siguientes funciones derivables, siempre que las obtenidas también sean derivables. En el ejemplo anterior se obtiene la tercera derivada de f, que es $f'''(x) = 6$.

Así, denominamos en general derivadas de orden superior de una función, las sucesivas derivadas de una función f y se denotan $f^{(k)}(x)$ para significar la derivada de orden k, aunque para las primeras derivadas se mantiene la notación anterior.

Ejemplo 11

Cálculo de derivadas de orden superior.

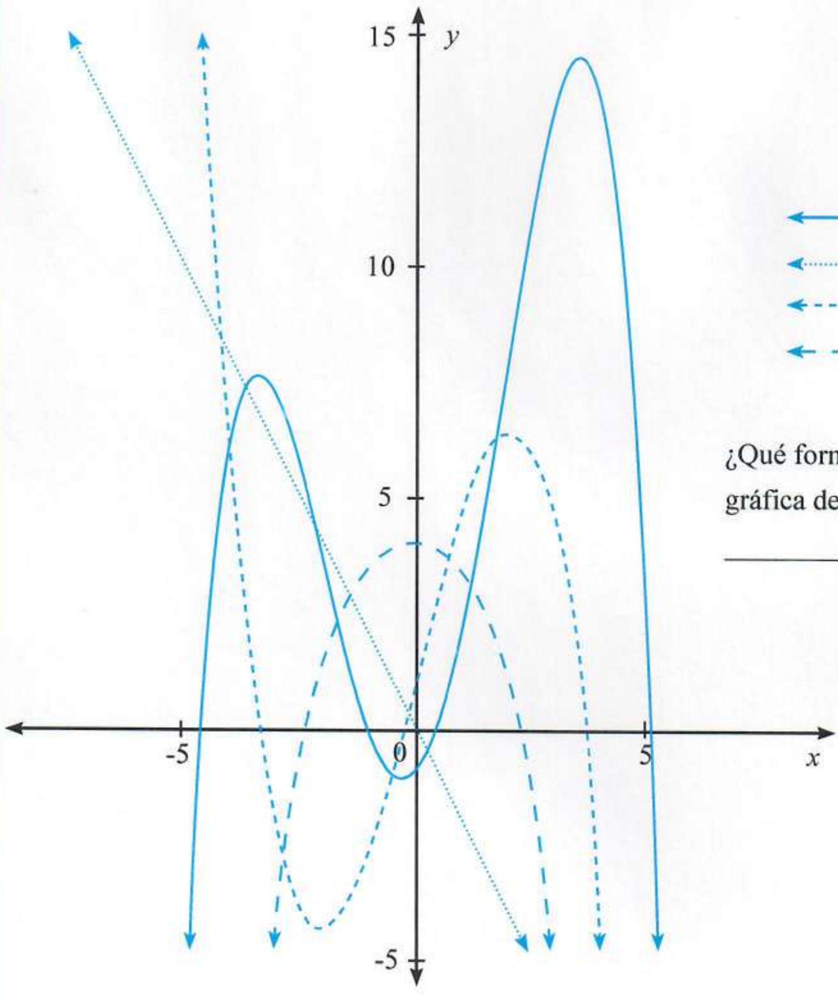
1. Si $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + 5x + 3$, entonces
   $f'(x) = 20x^4 - 8x^3 + 5$
   $f''(x) = 80x^3 - 24x^2$
   $f'''(x) = 240x^2 - 48x$
   $f^{(4)}(x) = 480x - 48$
   $f^{(5)}(x) = 480$
   $f^{(6)}(x) = 0$
   ¿Cuál será la expresión de $f^{(7)}(x)$?

2. Si $f^{(4)}(x) = 24$ hallemos una expresión para la función $f(x)$.
   $f^{(3)}(x) = 24x + a$
   $f^{(2)}(x) = 12x^2 + ax + b$
   $f'(x) = 4x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx + c$
   $f'(x) = x^4 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$ siendo a, b,c y d números reales cualesquiera.

Hemos visto como derivar una función de manera sucesiva, ahora relacionemos la representación gráfica de una función con las representaciones gráficas de sus derivadas sucesivas.

Actividad 2.10

En la siguiente representación gráfica, identifica la gráfica de la función f, f', f'' y de f'''.



←——→ ____________

←·······→ ____________

←- - - -→ ____________

←— — —→ ____________

¿Qué forma tiene la representación gráfica de $f^{(4)}$? ____________

____

Velocidad y aceleración

La derivada de una función $y = s(t)$, como ya conoces, representa la razón de cambio instantánea de la variable dependiente y respecto a la variable independiente t. Si la función derivada $s'(t)$, es derivable, la segunda derivada $s''(t)$, representa entonces la razón de cambio de $s'(t)$ respecto a t.

Cuando $s(t)$ esta dada por el trayecto recorrido de un objeto en un tiempo t, entonces $s'(t)$ representa la velocidad instantánea en el instante t.

Si $s(t)$ es la función posición de un objeto, entonces la función velocidad intantánea $\dot{v}(t)$ en el instante t es

$$\dot{v}(t) = s'(t)$$

La rapidez del objeto en el instante t es $|\dot{v}(t)|$.

Y la segunda derivada $s''(t)$, como razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, es la aceleración del objeto en el instante t. En esos casos se acostumbra a denominar a la segunda derivada por la letra a, por ser la aceleración.

Si $\dot{v}(t)$ es la función velocidad de un objeto, entonces la función aceleración $a(t)$ en el instante t es $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Ejemplo 12

Cálculo de la velocidad y aceleración.

Un vehículo se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal descrita por la ecuación

$$s(t) = 2t^3 - 6t^2,$$

donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Vamos a calcular la velocidad y la aceleración con que marcha a los 4 segundos.

Denotemos por A el vehículo, entonces $\dot{v}_A(t) = s'(t) = 6t^2 - 12t$ y $a_A(t) = s''(t) = 12t - 12$

Entonces para $t = 4$ segundos

$$\dot{v}_A(4) = s'(4) = (6)(4^2) - (12)(4) = 48\ m/s, \text{ y}$$

$$a_A(4) = s''(4) = (12)(4) - 12 = 36\ m/s \text{ en cada segundo.}$$

Esto quiere decir que la velocidad cambia en 36 metros por segundo en cada segundo, lo cual se denota abreviadamente por 36 m/s^2.

Ejercicios 2.9

1. Hallar la segunda derivada de las funciones siguientes
   a) $h(t) = 3(t^2 - 1)^3$ b) $y = \sqrt{x^2 + 16}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
2. Si $h(x) = f(2x)$ calcula la derivada hasta el orden 4 de esta función. ¿Podrías dar una expresión para la derivada de orden n de la función $h(x)$?
3. Si k es un número real constante, ¿cuál será la expresión de $h^{(n)}(x) = f(kx)$?
4. Hallar las derivadas y', y'' de la función $x^2 - y^2 - 4x = -4$ y el valor de estas en el punto $P(3, 1)$. ¿Qué puedes decir sobre la recta tangente a la función en dicho punto?
5. ¿Puede la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$ tener una tangente horizontal? Justifica tu respuesta.
6. La ecuación $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$, ¿tendrá puntos en los que la tangente sea horizontal?
7. Una partícula se desplaza según una recta y de acuerdo a la ecuación
   $$s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 8t + 1$$
   Calcula en qué tiempo la aceleración instantánea es 0 y a continuación la distancia recorrida, así como su velocidad instantánea en ese momento.

2.2.8 Razones de cambio relacionadas

Hay problemas en las que dos o más razones de cambio instantáneas estan relacionadas de forma explícita o implícita, a través de una fórmula o expresión matemática, y es posible determinar una de ellas cuando se conocen las demás, tal como se muestra a continuación.

Vamos a suponer que en un punto de riego de un cultivo, se esparce agua en forma de círculo y el agua penetra hasta una profundidad h en la tierra, medida desde la superficie, como se muestra en el esquema. El volumen de tierra que se beneficia viene dado por la fórmula del cilindro, es decir, $V = \pi r^2 h$. Tanto el volumen V como el radio r y la profundidad h son variables que dependen del tiempo de riego, es decir $V(t) = \pi r^2(t)h(t)$.

Sus razones de cambio están relacionadas por la derivada de la expresión anterior

$$V'(t) = [\pi r^2(t)h(t)]' = 2\pi r(t)\cdot r'(t)\cdot h(t) + \pi r^2(t)\cdot h'(t)$$

Cuando tenemos dos o más cantidades relacionadas entre sí, que varían con respecto a una misma variable y se quiere obtener la razón de cambio de una de ellas respecto a la otra, decimos que tenemos razones de cambio relacionadas.

Es decir, si $y = y(s)$ y $x = x(s)$ y existe una relación entre x y y, si se quiere obtener la razón de cambio de una respecto a la otra, hablamos de razones de cambio relacionadas.

Tal es el caso cuando el radio de una esfera varía respecto al tiempo, entonces el volumen de la esfera también cambia respecto al tiempo y se desea conocer la razón de cambio del volumen respecto al radio. Otro ejemplo es cuando en un terremoto se generan ondas circulares respecto al epicentro del fenómeno, cuyos radios crecen en función del tiempo y se quiere conocer la razón de cambio del área afectada con relación al radio.

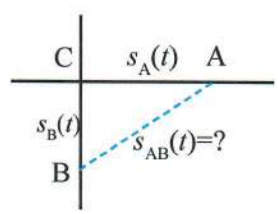
Unidad 2

Ejemplo 13

Dos motociclistas parten de un mismo punto de una ciudad, el primero hacia el este a 45 *km/h* y el segundo hacia el sur a 40 *km/h*. Determina a qué velocidad se van separando ambos motociclistas.

Representemos gráficamente la situación planteada y recuerda que la velocidad está dada por $v(t) = s/t$ y por tanto $s = v\cdot t$, donde s es la distancia recorrida en el tiempo t.

El espacio recorrido y la velocidad dependen del tiempo transcurrido, por lo que estas son dos variables relacionadas.



La distancia s recorrida por el motociclista A en un tiempo t, es $s_A(t) = 45\,\dfrac{km}{h}\cdot t$,

y la recorrida por el motociclista B es $s_B(t) = 40\,\dfrac{km}{h}\cdot t$.

Por el teorema de Pitagóras, sabemos que $s_{AB}^2 = s_A^2 + s_B^2$

$[s_{AB}(t)]^2 = [s_A(t)]^2 + [s_B(t)]^2 = [45\cdot t]^2 + [40\cdot t]^2 = 2025t^2 + 1600t^2 = 3625t^2$

Por tanto, la distancia entre los dos motociclistas en un tiempo t es $s_{AB}(t) = \sqrt{3625\,t^2} = 60.2\,t$.

Y como la derivada de s respecto a t es la velocidad instantánea, se tiene que la velocidad a la que se separan los dos motociclistas es $\dot{v}_{AB}(t) = 60.2\,\dfrac{km}{h}$.

Actividad 2.11

Un comerciante vende un producto en la actualidad a \$10 pesos, el cual tiene un incremento anual de su precio en \$1 peso. Con el precio actual vende 100 mil unidades, aunque la tendencia es que el número de productos vendidos decrece cada año en 5 mil. El comerciante desea conocer a qué razón cambia el ingreso total y si este crece o decrece.

El ingreso viene dado por la fórmula $I = C{\cdot}p$, donde C es la cantidad de unidades y p el precio. Como las cantidades y el precio cambian con el tiempo, entonces $I(t) = C(t){\cdot}p(t)$.

La razón de cambio, como conoces, está dada por la derivada en este caso de $I(t)$. Si derivamos se obtiene $I'(t) =$ ________________________

La razón de cambio del precio es $p'(t) = 1$ y la de la cantidad de productos vendidos es

$C'(t) = -5\ 000$, con valor negativo pues decrece la cantidad que se vende. Como la cantidad inicial es $C(t_0) = 100\,000$ y el precio es $p(t_0) = 10$, se tiene que

$I'(t_0) =$ __________________________ $= 50\ 000$.

El ingreso total está creciendo, ya que la razón de cambio es positiva.

Ejercicios 2.10

1. En una juguetería el precio de un juguete es de \$200 y se venden 200 por año. Si el precio crece a razón de \$12 pesos por año y la venta del juguete crece a razón de 100 por año, ¿a qué razón crece el ingreso?

2. Si se infla un globo de forma esférica halla la razón de cambio del volumen del globo respecto al radio cuando este es de 10 *cm*. ¿Cuál será la razón de cambio cuando el radio es de 1 *m*?

Hasta aquí se han estudiado un conjunto de reglas de derivación para las funciones algebraicas y algunas de sus aplicaciones. A continuación te resumimos las principales de estas reglas las que con su utilización frecuente y su correcta interpretación pueden fijarse en la memoria sin gran esfuerzo.

Resumen de las reglas de derivación

1. Si $f(x) = k$, con k constante, $f'(x) = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $[k{\cdot}f(x)]' = k{\cdot}f'(x)$
4. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
5. $[f(x){\cdot}g(x)]' = f'(x){\cdot}g(x) + f(x){\cdot}g'(x)$
6. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
7. $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\cdot f'(x)$
8. $[f^n(x)]' = n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$

Para concluir esta sección se relacionan ejercicios para aplicar las diferentes reglas de derivación estudiadas.

1. Calcular la derivada de

a) $h(x) = \sqrt{x}\,(4x + 2)$

b) $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(2t + 1)$

c) $y = (x^2 - 3)^2$

d) $h(s) = \dfrac{s^2}{\sqrt{4 - s^2}}$

e) $u(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

g) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2}$

h) $y = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

2. Halla la ecuación de la recta tangente a:

a) $y = 3x + 2$, en los puntos de abscisas $x_0 = 0, 1, 2$. ¿A qué conclusión llegas?

b) $y = 8\sqrt{x} - 2x$ en $x_0 = 1$.

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ en $x_0 = 1$ y representa gráficamente el resultado.

3. Consideremos el área de un círculo A como función de su radio, es decir $A(r) = \pi r^2$.

a) ¿Qué representa la derivada de A respecto al radio?

b) ¿Si el radio del círculo aumenta 2 *cm* por segundo, entonces su superficie aumenta $4\pi r$ por segundo?

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la superficie del círculo a los 10 segundos?

Ejercicios 2.11

4. Si un globo de forma esférica tiene un radio que aumenta a razón de 5 *cm* por segundo, determina a qué razón está creciendo su volumen.

5. Se lanza una piedra sobre el centro de un estanque de agua y con el impacto se forma en ese instante una onda circular de 5 *cm* de radio, que comienza a expandirse a razón de 2 *cm/seg.* ¿A qué velocidad estará creciendo el área del círculo?

6. Un reloj de arena es un instrumento, como el de la figura, que sirve para medir un determinado intervalo de tiempo, desde el momento en que la arena comienza a caer del recipiente superior al inferior, hasta que termina de hacerlo. Solo requiere de la energía potencial de la gravedad para su funcionamiento y vuelve a funcionar en cuanto se voltea dicho instrumento.

En un determinado reloj de arena el cono inferior tiene una altura $h = 16$ *cm* y el radio de la base es $r = 4$ *cm*. Si la arena cae formando un cono a razón de 2 cm^3/min, ¿con qué rapidez está cayendo la arena cuando el cono que se forma inferiormente semejante al de la base, tiene una altura de 5 *cm*?

Actividad intermedia:
Trabajo en equipo

Resuelve el siguiente problemario y realiza una autoevaluación del aprendizaje logrado.

1. Expresa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

Afirmación	V/F
Si $f(x) = \pi^3$, entonces $f'(x) = 3\pi^2$.	
La función derivada de una función polinomio de un grado mayor que cero es un grado menor a la función dada.	
La derivada de un producto de funciones es el producto de las derivadas de cada función.	
Si la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.	
Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.	
Si $h(x) = g[f(x)]$, $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$ y $f'(x_0) = 0$, entonces $h'(x_0) = 0$.	

2. Calcula las siguientes derivadas:
   a) $f(x) = x^7 + 2x^5 - 3x^2 + 4x + 5$.
   b) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x}$
   c) $(u \circ s)(x)$ si $u(s) = \sqrt{s}$ y $s(x) = 4x + 9$. Halla también $(s \circ u)(x)$.

3. El valor de la derivada de $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $x_0 = 1$ es:

   a) $f'(1) = -\dfrac{5}{2}$ b) $f'(1) = \dfrac{5}{2}$

   c) $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ d) Ninguno de estos valores. ¿Cúal?

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \sqrt{x-2}$ en $x_0 = 3$ y haz la representación gráfica.

5. Si $y = f(x)$, halla la derivada de $x^2y^2 - y - x = 0$.

6. Un auto A se desplaza desde el sur a 30 km/h en un punto que está a 3 km de una intersección y otro auto B desde el oeste a 40 km/h en otro punto situado a 4 km de la misma intersección. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los dos autos?

2.3 Derivadas de funciones trascendentes

Propósito

Calcula las derivadas de funciones trascendentes, aplicando las reglas de derivación

En la segunda parte de esta unidad, hemos aprendido las reglas de derivación para hallar la derivada de funciones algebraicas. Como sabemos, de la unidad 1, además de las algebraicas están las funciones trascendentes, es decir, las logarítmicas, las exponenciales y las trigonométricas, por lo que hallaremos reglas que nos permitan también derivar estas funciones, las que son continuas en sus dominios.

2.3.1 La derivada de funciones trigonométricas directas

En *Matemáticas III* se estudiaron las funciones trigonométricas, su periodicidad y representación gráfica, así como identidades trigonométricas fundamentales, todo lo cual debes repasar para avanzar en lo que sigue.

Partimos de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, la que sabemos es continua para todo número real y veremos que también es derivable. Por la definición de derivada, si aplicamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cdot \cos h + \cos x \cdot \operatorname{sen} h$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \cdot \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x + \cos x \cdot \operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \operatorname{sen} x \cdot (0) + \cos x \cdot (1) = \cos x$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ y $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, como se demostró en la unidad 1.

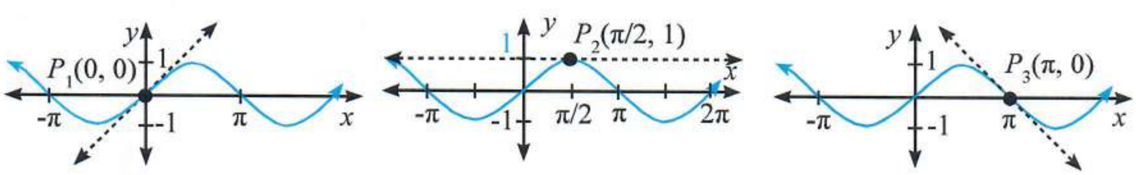
Por tanto, $f(x) = \operatorname{sen} x$ es derivable y

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Vamos a interpretar gráficamente este resultado a partir de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

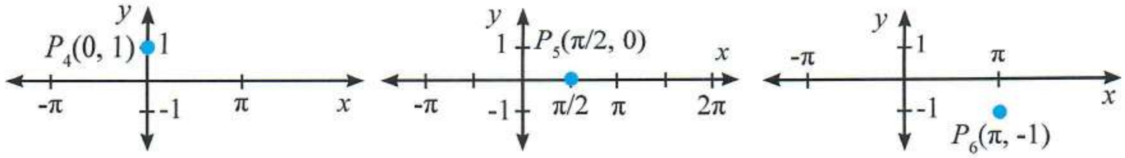
Para ello calculemos la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en varios valores de la variable independiente, por ejemplo en $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$, para hallar el valor de la pendiente de la tangente a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos $P_1(0, 0)$, $P_2(\pi/2, 1)$ y $P_3(\pi, 0)$.

De esta manera obtenemos la representación gráfica que se muestra a continuación.

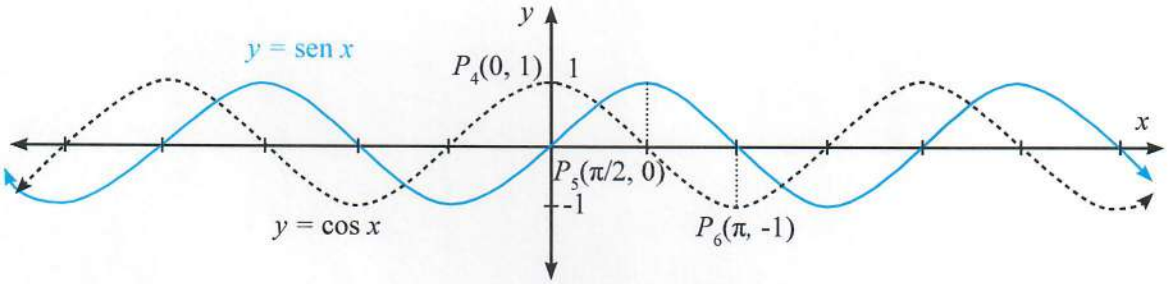


Obtenemos

$f'(0) = \cos(0) = 1$, $\quad f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0 \quad f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$



Si se halla el valor de la derivada de la función $f(x)$ = sen x en más puntos del eje real, por ejemplo para $\pi/6$ y $\pi/3$ se obtienen los puntos $P_7(\pi/6, 1/2)$ y $P_8(\pi/3, \sqrt{3}/2)$, se puede apreciar que se va describiendo la gráfica de la función cos x.



Actividad 2.12

Para obtener la derivada de la función $f(x) = \cos x$, recordemos la identidad trigonométrica

$$\cos(x + h) = \cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h$$

Entonces

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \underline{\qquad\qquad\qquad} = \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \underline{\qquad\qquad} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \underline{\qquad}$$
$$= \cos x \cdot (0) - \operatorname{sen} x \cdot (1) = -\operatorname{sen} x$$

Por tanto

$$\mathbf{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x}$$

Utilizando las derivadas de las funciones seno y coseno es posible obtener la derivada de otras funciones trigonométricas. Sea por ejemplo $f(x) = \tan x$. En ese caso, aplicando la regla del cociente

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{[\cos x \cdot \cos x] - [\operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)]}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

O lo que es lo mismo **$(\tan x)' = \sec^2 x$**

Ejercicios 2.12

1. Comprueba que
   a) $(\cot x)' = -\csc^2 x$
   b) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$
   c) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

2. Halla las derivadas de las funciones siguientes

a) $f(x) = 1 - \text{sen } x$

b) $h(t) = (3t - 2t^2)\cos t$

c) $g(x) = (\text{sen } x - \cos x)^2$

d) $u(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$

e) $g(x) = (\text{sen } x - \cos x)^2$

f) $g(x) = 3 \text{ sen } x - 3x$

g) $h(x) = \dfrac{\cos x - 2}{x^2}$

h) $f(x) = 4 \text{ sen } x \cdot \cos x$

i) $u(x) = \dfrac{\tan x}{\text{sen } x}$

j) $g(x) = (\cos x - 2 \text{ sen } x)^2$

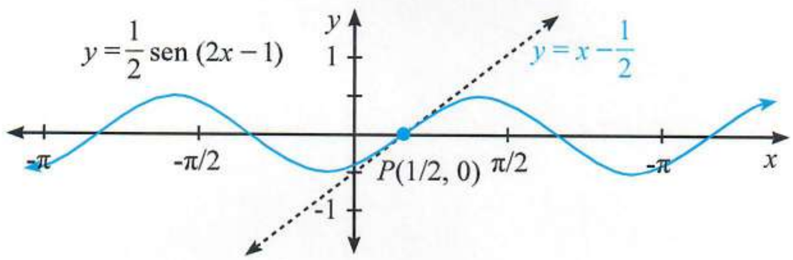
Actividad 2.13

Vamos a hallar una ecuación para la recta tangente a la curva dada por $y = \dfrac{1}{2}\text{sen } (2x - 1)$ en el punto $P\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y representar gráficamente ambas curvas.

La derivada $y' =$ ____________ y para el valor $x_0 = \dfrac{1}{2}$ se tiene $y' = 1$. Por tanto, la tangente tiene como pendiente _____.

Ahora utilizamos $y - y_0 = m(x - x_0)$ para hallar la ecuación de la tangente. Sustituyendo se obtiene $y =$ ____________.

Utilizando un graficador se puede ver el resultado obtenido



Hemos utilizado la regla de la cadena para hallar la derivada de funciones algebraicas, pero también esta se aplica para funciones trascendentes que sean derivables, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14

Sea la función $v(t) = \text{sen}(2t^2 - 2t + 1)$.

Consideremos $g(u) = \text{sen } u$, $u(t) = 2t^2 - t + 1$. Ambas son funciones derivables y la expresión general para la regla de la cadena $(g \circ f)' = g'[f] \cdot f'$, con f y g derivables, nos permite calcular la derivada de $v(t)$.

$$v'(t) = [\text{sen } (2t^2 - 2t + 1)]' = [\cos (2t^2 - 2t + 1)] \cdot (4t - 2) = (4t - 2) \cos (2t^2 - 2t + 1)$$

Ejercicios 2.13

1. Halla la derivada de:
   a) $y = \tan 5x$
   b) $v(t) = \sqrt{\operatorname{sen} t}$
   c) $v(t) = \sqrt{\operatorname{sen}(3t^2 + 4t - 2)}$
   d) $y = 2\cot 2x$
   e) $y = 2\cot\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right)$
   f) $h(x) = \cos x^2$
   g) $f(x) = \cos^2 x$
   h) $f(x) = \cos 2x$
   i) $y = 3\tan 2x$
   j) $f(x) = \cos^2 x - 3\cos x + x$
   k) $f(x) = \cos^2(2x) - 3\cos(2x) + 2x$
2. Calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{x+2}\right)$
3. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Halla sucesivamente hasta el orden 8 las derivadas de $f(x)$. ¿Qué puedes deducir del resultado?
4. ¿Cuál debe ser la expresión de $f^{(8)}(x)$ si $f(x) = 2\operatorname{sen} x$?

Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$

2.3.2 La derivada de funciones trignométricas inversas

Como conoces, si $f(x)$ es una función, se llama función inversa o recíproca de f, y se denota f^{-1}, a otra función que cumple que:

$$\text{si } f(a) = b, \text{ entonces } f^{-1}(b) = a.$$

Dicho de otro modo, se cumple $f^{-1}[f(x)] = x$ y $f[f^{-1}(y)] = y$

Es decir, una función deshace la acción de la otra.

Si f es derivable y f^{-1} su función inversa también lo es, con $f^{-1} \neq 0$, entonces se cumple que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

Para demostrar esa afirmación, vamos a partir de la igualdad $y = f[f^{-1}(y)]$. Si derivamos en forma implícita, aplicando la regla de la cadena, se tiene

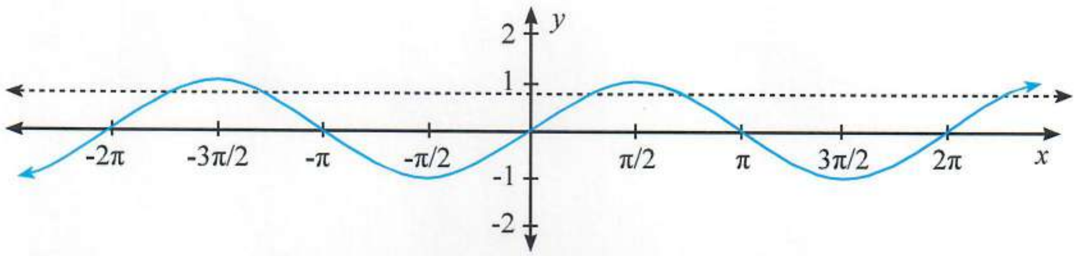
$$y' = f'[f^{-1}(y)] \cdot \left[(f^{-1})'(y)\right]$$

De donde

$$1 = f'(x) \cdot \left[(f^{-1})'(y)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} \qquad (2.3)$$

Para continuar, analicemos primeramente si las funciones trigonométricas tienen una función inversa. Como ya conoces, las funciones trigonométricas son funciones periódicas. Eso significa que para un valor de x, existen un número infinito de imágenes, como se puede apreciar en su representación gráfica. Tomemos por ejemplo la función $f(x)$ = sen x.



Ninguna de estas funciones periódicas es uno a uno, como se puede comprobar gráficamente ya que no pasan la prueba de la línea horizontal, por lo que en su dominio no tienen función inversa. Sin embargo, se puede restringir su dominio para que sí sean uno a uno.

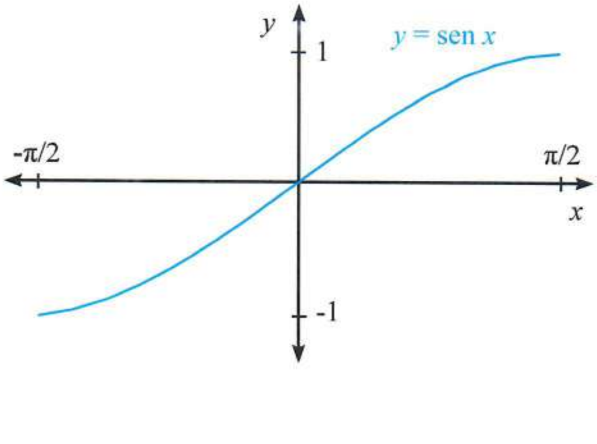
Como son funciones periódicas, constan de un ciclo que se repite constantemente y por ello, para considerar sus funciones inversas hay que restringir el dominio de las funciones trigonométricas a uno de esos ciclos, por ejemplo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, para la función sen x.

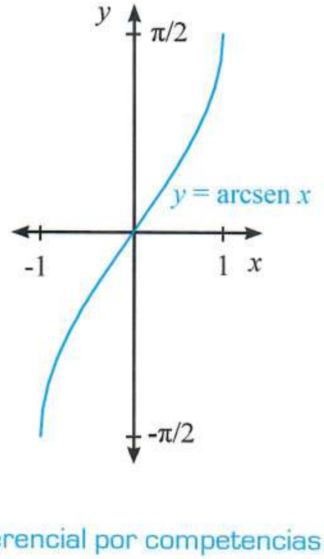
Sea pues $f(x)$ = sen x, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, entonces la función inversa f^{-1} de sen x se denota por y = arcsen x, lo cual significa que y es el valor del ángulo, medido en radianes, tal que sen $y = x$.

Como es la función inversa se cumple que $(f \circ f^{-1})(x)$ = sen (arcsen x) = x.

Por ejemplo arcsen (1) = $\pi/2$, ya que sen $\pi/2 = 1$ o arcsen (1/2) = $\pi/6$, pues sen $\pi/6 = 1/2$.

$f(x)$ = arcsen x, tiene $Dom\, f = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$ y $Rango\, f = \left\{x \in R \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ como se puede apreciar en la gráfica.



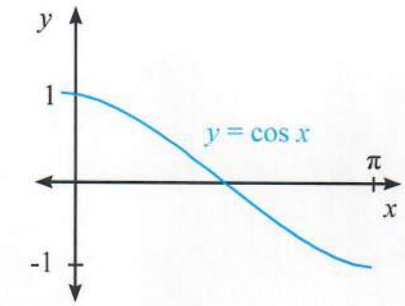


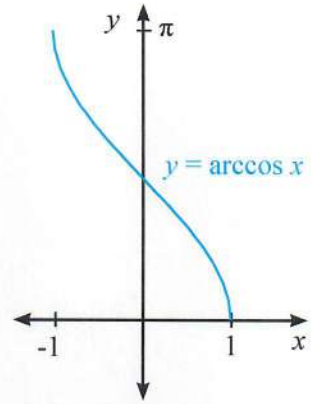
Unidad 2

Para definir la inversa de la función coseno hay que restringir también su dominio y se define la función inversa como y = arccos x.

Así arccos (0) = 1, pues cos 0 = 1 y arccos (1/2) = π/3, pues cos π/3 = 1/2.

Su dominio y rango son *Dom* $f = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$ y *Rango* $f = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ como se ilustra en las figuras siguientes



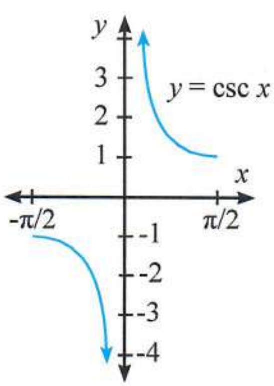


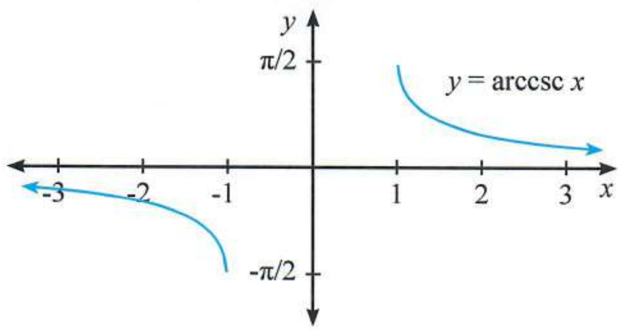
De forma similar se definen las funciones inversas de las restantes funciones trigonométricas, a partir de restringir sus dominios para que dichas funciones tengan una función inversa.

Así, $f(x)$ = arctan x, es la función inversa de tan x, *Dom* $f = R$ y *Rango* f = (-π/2, π/2) y $f(x)$ = arccot x, es la función inversa de cot x. *Dom* $f = R$ y *Rango* f = (0, π).

Para definir la función inversa de la función csc x, también hay restringir su dominio, pero esta función en el intervalo (-π/2, π/2) tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pues $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$ y sen 0 = 0. Por eso, consideramos para la función cosecante como dominio restringido $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. El conjunto imagen de la cosecante está entre (-∞, -1] y [1, +∞), ya que $|\csc x| = \left|\dfrac{1}{\text{sen}\, x}\right| \geq 1$.

De acuerdo con lo anterior el dominio de $f(x)$ = arccsc (x) es *Dom* $f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y su rango está dado por *Rango* $f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, como se puede apreciar en la figura siguiente.





Análogamente se obtiene para la función $f(x)$ = arcsec x, que *Dom* $f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y *Rango* $f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo 15

Calculemos sen[(arccos (x)]

Si $y = \arccos(x)$ entonces $x = \cos y$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, luego $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$

$x = \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$, de donde despejando $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$

Por tanto, $\operatorname{sen}[\arccos(x)] = \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$

Ejercicios 2.14

1. Determina el valor numérico de

   a) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\arctan(-1)$ c) $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

2. Determina a qué es igual

   a) $\cos[\operatorname{arcsen}(x)]$ b) $\cot[\operatorname{arccot}(x)]$ c) $\tan[\arccos(x)]$

Hemos restringido el dominio de las funciones trigonométricas para definir sus funciones inversas. A continuación obtendremos reglas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y partiremos primeramente de la función $y = \operatorname{arcsen}(x)$, por lo que $x = \operatorname{sen} y$. De la expresión (2.3) obtenida al inicio de este epígrafe, si aplicamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Así obtenemos la fórmula para la derivada de la función arcsen(x)

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ con } -1 < x < 1$$

Utilizando el mismo procedimiento se obtiene

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ con } -1 < x < 1$$

Actividad 2.14

Vamos a hallar la derivada de $y = \arctan(x)$, aplicando la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

De acuerdo con la fórmula (2.3) para la derivada de la función inversa, se tiene

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \underline{\hspace{4cm}}$$

y por tanto, como $x = \tan y$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Aplicando identidades trigonométricas que relacionen las correspondientes funciones triagonométricas directas es posible hallar fórmulas para las demás derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Así, se tiene la siguiente tabla.

Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas inversas

$(\text{arcsen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, con $-1 < x < 1$	$(\text{arccsc}\, x)' = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$(\text{arccos}\, x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, con $-1 < x < 1$	$(\text{arcsec}\, x)' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$(\text{arctan}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$	$(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in R$

Ejercicios 2.15

Aplica las reglas de derivación, así como las fórmulas para derivar las funciones trigonométricas inversas para hallar la derivada de:

a) $y = x^2 \cdot \text{arcsen}\,(x)$

b) $y = \text{arccos}\,(\pi x^3)$

c) $y = [\arctan\,(x)]^3$

d) $y = -\dfrac{1}{2}\,\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2.3.3 La derivada de la función exponencial

En los cursos anteriores has estudiado la potencia como la expresión a^n, donde a es un número real positivo y n un número racional. Más recientemente hemos trabajado con expresiones como

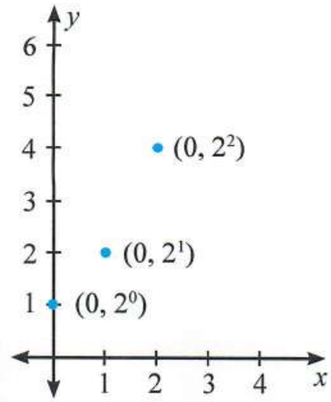
$$f(x) = x^{10}, \quad v(t) = (2t)^5 \quad \text{o} \quad y = (\text{sen}\, x)^{1/2},$$

entre otras, en las que la base de las potencias son funciones y el exponente es un número racional fijo. Consideraremos ahora aquellas en las que la base es una constante y el exponente es variable. Para ello tomemos un ejemplo que ilustra este tipo de situación.

En microbiología, el crecimiento se define como el incremento del número de células y la fisión binaria es un proceso por el cual una célula se divide y forma dos células iguales. Un cultivo de una bacteria, por la fisión binaria, se duplica de manera regular durante un intervalo de tiempo determinado.

Representemos gráficamente esta situación, a partir de una tabla de valores, en el caso de una bacteria cuyo proceso de fisión binaria dura una hora, para apreciar su comportamiento, si se inicia con una bacteria, momento en el cual se empieza a medir el tiempo que transcurre.

Tiempo (horas)	Número de bacterias	Expresión matemática
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7



Como se puede observar la expresión numérica de ese proceso nos conduce a considerar la relación $N(t) = 2^t$, donde N es el numero de bacterias que existen en el cultivo al cabo de las t horas. ¿Podrías calcular cuántas bacterias tendrá el cultivo al cabo de un día?

Es decir, tenemos una función $f(x) = 2^x$, toda vez que a cada valor de x, es decir de horas transcurridas, le corresponde un único valor de $f(x)$, el número de bacterias.

A este tipo de función se le denomina **función exponencial**. Nota la diferencia entre la función potencia donde la variable independiente es la base y la función exponencial, en la que la variable independiente es el exponente.

variable

$f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$

En el ejemplo anterior la variable independiente x representa un número entero positivo, las horas transcurridas. Si de forma más general consideramos para $f(x) = 2^x$ como dominio el conjunto de los números racionales seguimos obteniendo una función cuya representación gráfica mantiene el mismo comportamiento que el del ejemplo.

En efecto, para

$$x = 0.5, \text{ se tiene } f(0.5) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1.4142...$$
$$x = 1.5, \text{ se tiene } f(1.5) = 2^{3/2} = 2\sqrt{2} = 2.8284...$$

Así, se obtiene la siguiente tabla, para algunos valores de x.

Valor de x	Valor de $f(x) = 2^x$
$x = 0.5$	$y \approx 1.4142$
$x = 1.5$	$y \approx 2.8284$
$x = 2.5$	$y \approx 5.65682$
$x = 3.5$	$y \approx 11.3137$

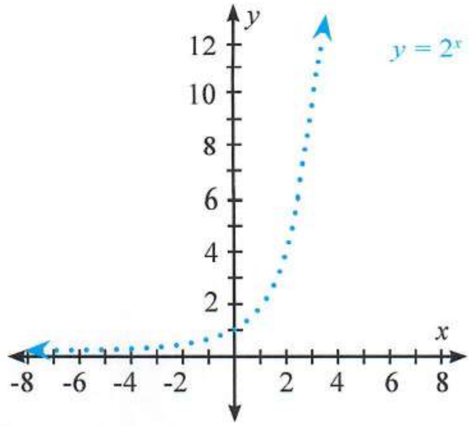
De esta manera, para un número racional cualquiera x, podemos escribir $x = p/q$, con p entero y q entero positivo, luego, $y = 2^x = 2^{p/q} = \sqrt[q]{2^p}$.

Unidad 2

Para ampliar el dominio de $f(x) = 2^x$ al conjunto de los números reales hay que dar un sentido, por ejemplo al valor 2^π, $\pi = 3.14159...$, es decir, cuando el exponente es un número irracional.

A ello se llega por un proceso de aproximación. La función $f(x) = 2^x$, así definida, es creciente y como $3 < \pi < 4$, entonces debe ser $2^3 < 2^\pi < 2^4$.

Como $3 < 3.1 < 3.14159... < 3.2 < 4$, entonces $2^3 < 2^{3.1} < 2^\pi < 2^{3.2} < 2^4$.



Así sucesivamente

$$2^3 < 2^{3.1} < 2^{3.14} < 2^{3.141} < 2^{3.1415} < ... < 2^{3.14159...} < ... < 2^{3.1416} < 2^{3.142} < 2^{3.15} < 2^{3.2} < 2^4$$

Y por tanto se define 2^π, como el número que está entre todos esos valores que crecen y los que decrecen.

Análogamente se puede definir 2^x, para un número irracional cualquiera, como un proceso de aproximación entre dos valores racionales.

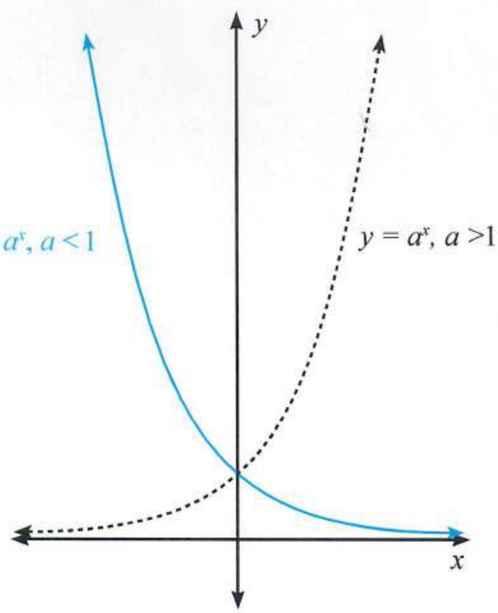
De manera más general, sea $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y x una variable que representa un número real cualquiera. Ante todo, estamos considerando una función, ya que a cada valor de x corresponde un solo valor de $f(x)$.

A continuación, se puede probar que esta función es uno a uno aplicando la prueba de la recta horizontal.

$f(x) = a^x$ se llama función exponencial de base a.

Dom $f = R$ y *Rango* $f = R^+$

Para $a < 1$, la función $f(x) = a^x$ es decreciente y para $a > 1$ es creciente, como se puede apreciar en el siguiente gráfico.



Para $a = 1$, el comportamiento de esta función es diferente. ¿Cuál es la gráfica de $f(x)$ cuando $a = 1$?

Ejemplo 16

Cálculo con funciones exponenciales.

1. Hallemos el valor de una función exponencial en un determinado valor de la variable.
   Si $s(t) = 3^{t^2+1}$, entonces $s(2) = 3^{2^2+1} = 3^5 = 243$

2. Dada la función $f(x) = 3^{x-1}$, determinar para qué valor de x, $f(x) = 27$.
   En ese caso $3^{x-1} = 27 = 3^3$, por lo que de acuerdo con las propiedades de la potencia $x - 1 = 3$ y $x = 4$.

Ejercicios 2.16

1. Halla el valor de x en
   a) $3^x = 81$
   b) $5^x = \dfrac{1}{25}$
   c) $2^x = \dfrac{16}{\sqrt{2}}$
   d) $5^{x^2-2} = 25$
   e) $((81)(3^x))^x = \dfrac{1}{81}$
2. ¿A qué número hay que elevar $4\sqrt{4}$ para obtener 64?
3. Si $f(x) = (2\pi)^x$, halla el valor de $f(3)$
4. Si $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, calcula $g(-3)$.
5. En el ejemplo de la fisión binaria de las bacterias descrito por la relación $N(t) = 2^t$, ¿qué tiempo en horas debe transcurrir para que ya sean 512 bacterias?

Para encontrar la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ comencemos por aplicar la definición de derivada. Si esta función f es derivable en 0, se tiene entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(a^{(0+h)} - a^0)}{h} = a^x \cdot f'(0)$$

Es decir,

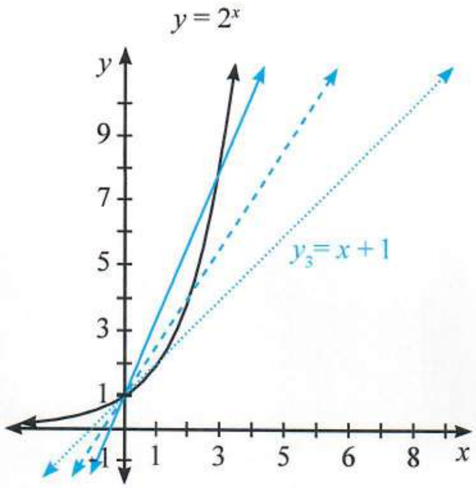
$$f'(x) = (a^x)' = f'(0) \cdot a^x \qquad (2.4)$$

Ello significa que el valor de la derivada de a^x es proporcional a la propia función a^x. Sin embargo, no conocemos si existe y el valor de $f'(0)$; pero este resultado sugiere preguntarnos si existirá algún valor de la base a para el cual f sea derivable en cero y $f'(0) = 1$, con lo cual tendríamos una función cuya derivada es ella misma.

Para investigar esto hay que recordar primero que cualquiera sea el valor positivo que se tome como la base a, la gráfica de esta función pasa por el punto $P(0, 1)$, ya que $a^0 = 1$ y que $f'(0)$ constituye el valor de la pendiente de la tangente a la función $y = a^x$ en dicho punto.

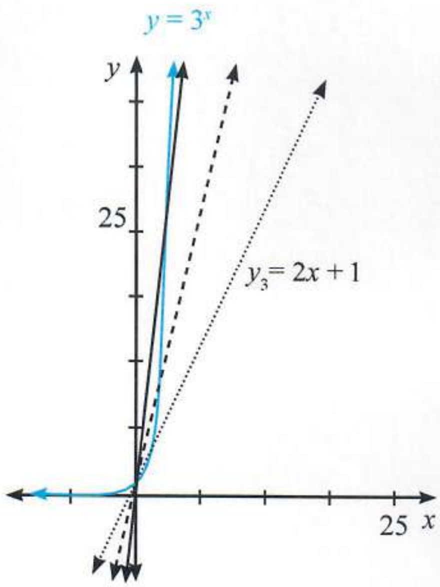
Tomemos de nuevo la función $f(x) = 2^x$ y también la función $g(x) = 3^x$ y analizamos qué sucede cuando consideramos las rectas secantes a estas funciones, determinadas por el punto $P(0, 1)$ y otro punto $P(x, y)$ que se acerca a $P(0, 1)$.

Vamos a representar gráficamente esta situación y observemos la tabla de valores que se muestra a continuación.



Para $y = 2^x$

Valor de x	Valor de $y = 2^x$	$P_1(x, y)$	Pendiente
3	8	(3, 8)	$m_1 = 2.33$
2	4	(2, 4)	$m_2 = 1.5$
1	2	(1, 2)	$m_3 = 1$
0.5	$\sqrt{2}$	(0.5, 1.4142)	$m_4 = 0.8284$
0.05	$\sqrt[20]{2}$	(0.05, 1.03526)	$m_5 = 0.7052$
0.005	$\sqrt[200]{2}$	(0.005, 1.0034)	$m_6 = 0.6943$
0.0005	$\sqrt[2000]{2}$	(0.0005, 1.0003)	$m_7 = 0.6932$



Para $y = 3^x$

Valor de x	Valor de $y = 3^x$	$P_1(x, y)$	Pendiente
3	27	(3, 27)	$m_1 = 8.67$
2	9	(2, 9)	$m_2 = 4$
1	3	(1, 3)	$m_3 = 2$
0.5	$\sqrt{3}$	(0.5, 1.7320)	$m_4 = 1.464$
0.05	$\sqrt[20]{3}$	(0.05, 1.0564)	$m_5 = 1.1293$
0.005	$\sqrt[200]{3}$	(0.005, 1.0055)	$m_6 = 1.1016$
0.0005	$\sqrt[2000]{3}$	(0.0005, 1.0005)	$m_7 = 1.0989$

Como se puede apreciar de la tabla de valores, las pendientes de las tangentes a las funciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$ se aproximan a 0.69 y 1.10 respectivamente, en la medida en que nos acercamos a $x = 0$.

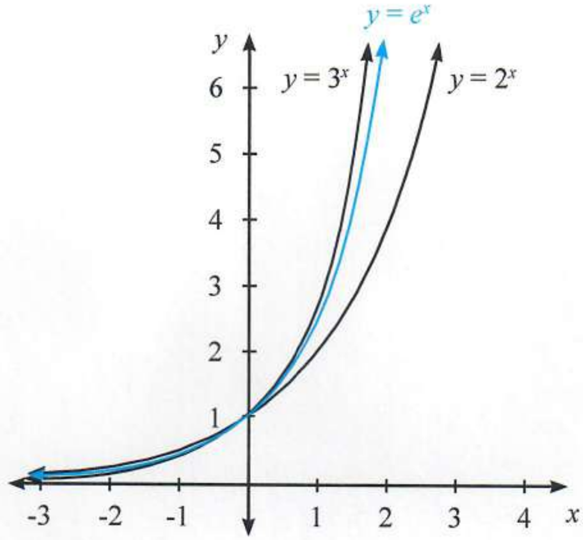
En el paso al límite, estos valores constituyen el valor de la derivada de estas dos funciones en el punto $x = 0$. En efecto,

Para $a = 2$ se tiene $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 2^0}{h} \approx 0.69$

Para $a = 3$ se tiene $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3^h - 3^0}{h} \approx 1.10$

Por tanto, debe existir un número real positivo entre 2 y 3 tal que, si este número se toma como base de la función exponencial, la pendiente de la tangente a esa función en el punto $P(0, 1)$ es uno. A ese número se le representa por la letra ***e***, denominado así por el matemático suizo Leonard Euler y por lo que también se le conoce por el número de Euler.

De esta forma la gráfica de $y = e^x$, se encuentra entre las gráficas de $y = 2x$ y $y = 3x$, como se muestra en la figura.



Unidad 2

Actividad 2.15

El límite $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ que nos permitió obtener la expresión (2.4) para la función exponencial, conduce a definir a e, precisamente como el número real tal que satisface la igualdad

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

que ya fue estudiado en la Unidad 1 y se puede utilizar esta expresión para obtener una aproximación del número e. Vamos a partir en la siguiente tabla de los valores 2.7 y 2.8, en la que se pueden completar los datos mediante una calculadora.

h	$\frac{(2.7)^h - 1}{h}$	$\frac{(2.8)^h - 1}{h}$
0.1	1.044	1.084
0.01	0.998	1.034
0.001	0.993	1.030

Ello nos permite afirmar que el valor de e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Un razonamiento similar si hacemos otra tabla para valores entre 2.71 y 2.72, nos lleva a concluir que e está entre 2.71 y 2.72, y una tabla con valores entre 2.718 y 2.719 permite afirmar que e está entre 2.718 y 2.719. Así, se pueden obtener sucesivamente cifras decimales para aproximar el número e y se tiene

$$e = 2.718281828........$$

El número e es un número irracional, como π, es decir que no se puede expresar como una razón de dos números enteros; o bien, que no puede ser representado por un número decimal exacto o un decimal periódico. Pero también, como π, es un número trascendente, es decir, que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. El estudio de este comportamiento y del cálculo de cifras para e fue objeto de atención por muchos matemáticos durante siglos.

La ventaja de prestar particular atención a este número e está precisamente en que de acuerdo con la expresión (2.4), confiere a la función exponencial la importante propiedad de que coincide con su derivada, cuando la base es e, la que será de mucha utilidad en lo adelante. Es decir

$$(e^x)' = e^x$$

Esto significa geométricamente que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = e^x$, en cualquiera de sus puntos coincide con la ordenada o segunda coordenada de dicho punto.

Vamos a aplicar este resultado al cálculo de derivadas aplicando las reglas ya estudiadas.

Ejemplo 17

Calcular la derivada de:

a) $f(x) = xe^x$

$$(xe^x)' = xe^x + e^x = (x + 1)\, e^x$$

b) $f(x) = e^{x^2}$

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (2x) = 2xe^{x^2}$$

c) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{2x}$

$$\left(\frac{e^x - 2}{2x}\right)' = \frac{e^x(2x) - (e^x - 2) \cdot 2}{4x^2} = \frac{2e^x(x - 1) + 4}{4x^2} = \frac{(x - 1)\, e^x + 2}{2x^2}$$

Unidad 2

Ejercicios 2.17

1. ¿Puedes obtener la cuarta cifra decimal del número e, a partir de realizar una tabla como la de la Actividad 2.15?

2. Calcular la derivada de:

   a) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$ b) $y = e^{x \operatorname{sen} x}$ c) $y = e^x \operatorname{sen} x$

   d) $y = xe^{\operatorname{sen} x}$ e) $f(x) = (e^{2x} + 3)^{\frac{1}{4}}$ f) $g(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$

   g) $h(x) = \cos^2 x \cdot e^{x^3}$ h) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

3. En el Ejemplo 15 inciso a) calculamos la derivada de $f(x) = xe^x$ y se obtuvo

   $$f'(x) = (x + 1)e^x.$$

   Calcula la segunda y tercera derivada de $f(x)$. ¿A qué conclusión llegas y cual será la expresión de la derivada de orden n de esta función?

4. Determina una función $f(x)$ tal que $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

2.3.4 La derivada de la función logarítmica

Hemos estudiado la función derivada para las funciones algebraicas y dentro de las trascendentes para las trigonométricas y la exponencial. Pudieras comprobar que ninguna de esas funciones tiene como derivada a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, luego podemos preguntarnos si existirá una función que tenga a $f(x) = \frac{1}{x}$ como derivada.

Para llegar a ello, vamos a retomar algunos conceptos fundamentales de la función logaritmo que ya has estudiado.

Cuando consideramos la función $y = a^x$, estamos partiendo de que x es la variable independiente y y es función de x. Pero para un valor de y, podríamos preguntarnos ¿a qué número hay que elevar a, para obtener dicho número? Es decir, estaríamos considerando a x como función de y.

Tal es el caso, por ejemplo, de la situación inversa a la del ejemplo presentado sobre el cultivo de las bacterias en la sección 2.3.3, si quisieramos conocer al cabo de qué tiempo en horas el cultivo llegaría a un número determinado de bacterias.

La función exponencial $y = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es uno a uno y por lo tanto tiene función inversa, a la cual se le denomina función logaritmo.

Es decir, si $x = a^y$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la función logaritmo es la que hace corresponder a cada número real x dado, el número y al cual hay que elevar a para obtener x. En símbolos

$$y = \log_a x \text{ , sí y sólo si } x = a^y \text{ , con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

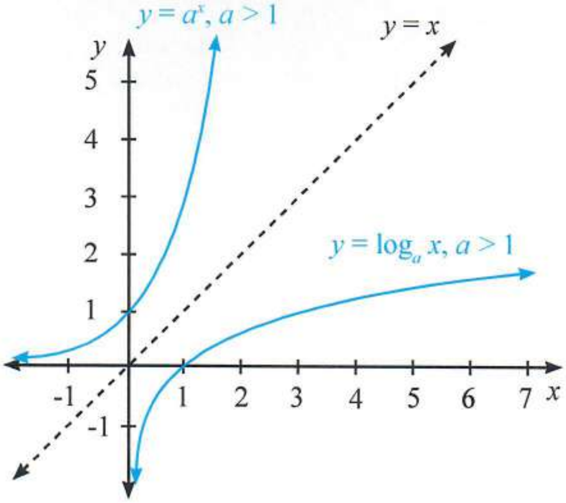
Así por ejemplo $\log_3 81 = 4$, ya que $3^4 = 81$ y $\log_2 0.25 = -2$, pues $2^{-2} = 0.25$

La función logaritmo, para $a > 1$, es creciente al igual que la función exponencial. Para $a < 1$ es decreciente.

Su dominio es $(0, \infty)$ y su rango es R.

Su gráfica es simétrica a la de $y = a^x$, respecto a la recta $y = x$, como se puede apreciar en la figura, para $a > 1$. Para $a < 1$, también es simétrica a $y = a^x$, ¿respecto a qué recta?

Todas las gráficas de la función logaritmo pasan por el punto $P(1, 0)$ pues $\log_a 1 = 0$



Actividad 2.16

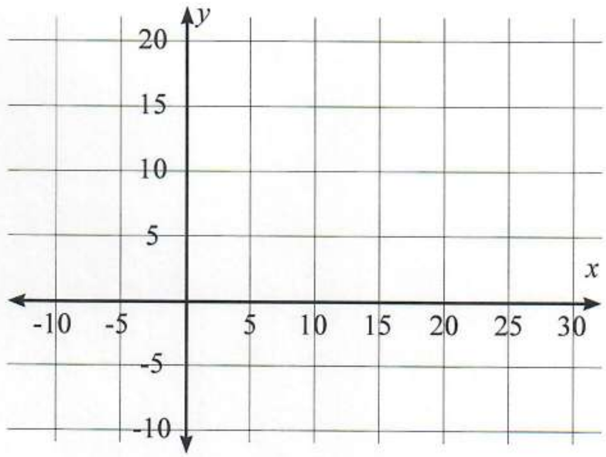
Completa las tablas que aparecen a continuación para las funciones $y = \log_{1/2} x$ y para $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para comprobar la simetría de la función logaritmo respecto a la función exponencial. Traza las gráficas correspondientes, así como la del eje de simetría.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
-3	
	4
-1	
0	
	0.5
2	
3	

$y = \log_{1/2} x$

x	y
8	-3
	-2
	-1
1	
	1
0.25	
	3



A partir de las propiedades de la función exponencial se pueden demostrar las siguientes propiedades fundamentales de la función logaritmo:

1. Logaritmo de un producto
   $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. Logaritmo de un cociente
   $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. Logaritmo de una potencia
   $\log_a x^n = n \log_a x$
4. Logaritmo de una raíz
   $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

Demostremos la primera de estas propiedades

Sean $\log_a x = X$, $\log_a y = Y$ entonces $x = a^X$, $y = a^Y$. Si aplicamos la propiedad del producto de potencias se tiene $x \cdot y = a^X \cdot a^Y = a^{X+Y}$, luego por definición de logaritmo $\log_a (x \cdot y) = X + Y = \log_a x + \log_a y$.

Ejercicios 2.18

1. ¿Cuál es el valor de
   a) $\log_3 243$ b) $\log_{\sqrt{5}} 625$ c) $\log_{10} 0.001$
   d) $\log_{10} 1$ e) $\log_a a,\ a > 0$ f) $\log_5 \sqrt{25}$
2. ¿Si $a > 0$, a qué es igual $\log_a a^x$?
3. Calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos
   a) $\log_5 25^{25}$ b) $\log_4 64 + \log_6 36$ c) $\log_2 160 - \log_2 5$
   d) $\dfrac{\log_{10}\ 100000}{\log_{10}\ 100}$ e) $\dfrac{2\log_3 9 - \log_3 27}{\log_4 2}$

Para obtener la derivada de la función logaritmo obtengamos primero la derivada en el caso de que a sea el número de Euler e. Al logaritmo de base e, se le denomina logaritmo natural o también logaritmo neperiano, por haber sido definido por primera vez por el matemático escosés John Napier y se le denota por las siglas **ln**.

Sea pues $y = \ln x$, es decir $e^{y} = x$. Nota que para $x = e$, $\ln e = 1$. Entonces por la definición de derivada

$$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln (x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Ahora aplicamos las propiedades de los logaritmos y multiplicamos y dividimos convenientemente por x en el denominador, ya que $x \neq 0$.

$$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{1}{\frac{h}{x}} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{x}{n} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Si aplicamos las propiedades del logaritmo y los límites, así como que la función logaritmo es contínua se cumple

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

Para llegar a ese resultado hemos utilizado la expresión estudiada en la Unidad 1 denominada límite fundamental algebraico y que expresa que $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

De esta forma hemos obtenido una función cuya derivada es la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Es decir, para $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

En la sección 2.2.6 se obtuvo que la derivada de la función $f(x) = x^{n}$, es también $f'(x) = nx^{n-1}$, cuando n es un número racional. Vamos ahora a utilizar el resultado anterior de la derivada de la función logaritmo para obtener el mismo resultado cuando se considera un número real cualquiera como exponente.

Sea $y = x^{k}$, de base x positiva y k un número real, entonces $\ln y = \ln x^{k} = k \ln x$ y por la definición de logaritmo $y = e^{k \ln x}$

Ahora derivamos aplicando la regla de la cadena y obtenemos

$$y' = (e^{k \ln x})' = e^{k \ln x} \cdot (k \ln x)' = e^{k \ln x}\left(\frac{k}{x}\right) = \left(\frac{k}{x}\right) \cdot y = \left(\frac{k}{x}\right) \cdot x^{k} = kx^{k-1}$$

Por tanto $(x^{k})' = kx^{k-1}$ para k un número real cualquiera y base positiva.

De igual manera se obtiene la derivada de la función exponencial de base general $a > 0$, a partir de la obtenida para la de base e, como haremos a continuación, es decir

$$(a^{x})' = (\ln a)a^{x}$$

Actividad 2.17

Sea $y = a^x$, entonces $\ln y = \ln a^x = x\ln a$, de donde $a^x = e^{(\quad)}$

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene ______________________

Si ahora sustituimos $e^{x\ln a}$, obtenemos ______________________

Y por tanto $(a^x)' = (\ln a)a^x$.

La expresión obtenida $\ln a$ se corresponde con el factor $f'(0)$ de la expresión 2.4 en la sección 2.3.3, que para el caso en que la base $a = e$, entonces ______________________

Analogamente se puede obtener, aplicando la regla de la cadena, que si a es un número positivo y $u(x)$ derivable, entonces

$$(a^{u(x)})' = (\ln a)\, a^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Ejemplo 18

Derivada de funciones exponenciales.

1. Si $f(x) = x^{\sqrt{5}}$, entonces $f'(x) = (x^{\sqrt{5}})' = \sqrt{5} \cdot x^{\sqrt{5}-1}$
2. La función derivada de $y = (\sqrt{5})^x$ es $y' = [(\sqrt{5})^x]' = (\ln\sqrt{5})(\sqrt{5})^x$
3. Sea $y = 5^{(x^2-1)}$, entonces $y' = [5^{(x^2-1)}]' = (\ln 5) \cdot [5^{(x^2-1)}] \cdot (2x) = 2(\ln 5)\, x 5^{(x^2-1)}$

Finalmente, para obtener la derivada de la función logaritmo cuando la base es un número positivo $a \neq 1$, obtenemos primero la relación entre el logaritmo de base a y el logaritmo natural.

Si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$. Entonces

$\ln a^y = y \ln a = \ln x$, de donde $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Si sustituimos y entonces $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Esta última expresión nos muestra que basta trabajar con el logaritmo natural o de base e, ya que cualquier logaritmo en otra base a se transforma en el de base e multiplicando por el factor $\dfrac{1}{\ln a}$.

En particular si $x = e$, se tiene que $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$

Utilizando esa expresión vamos a obtener la derivada de $\log_a x$.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log_a e}{x}$$

De esta manera $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(\ln a)\, x} = \dfrac{\log_a e}{x}$

Si en la expresión anterior se considera la función compuesta $\log_a u(x)$ y se aplica la regla de la cadena se obtiene

$$[\log_a u(x)]' = \frac{\log_a e}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{(\ln a)\, u(x)}$$

Actividad 2.18

Sea $h(x) = \sqrt{\log_{10} x}$, que es la función compuesta de $s(u) =$__________ y $u(x) =$____________

$h'(x) =$ ______________ $\cdot\ [\log_{10} x]' = \frac{1}{2}[\log_{10} x]^{-\frac{1}{2}} \cdot$ __________

De donde $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\log_{10} x}} \cdot$ _________ $=$ ____________________

Vamos a resumir también las reglas más importantes estudiadas para la derivada de las funciones exponencial y logarítmica.

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$ $\qquad (a^{u(x)})' = (\ln a)\, a^{u(x)} \cdot u'(x)$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{(\ln a)\, x} = \dfrac{\log_a e}{x}$

Ejercicios 2.19

1. Halla la derivada de
   a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b) $g(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ c) $h(x) = \ln(\text{sen}^2 x)$
2. De acuerdo a la composición de funciones, considera a $h(x) = \sqrt{\log_{10}(x+1)}$ como la composición de 3 funciones, calcula $h'(x)$.
3. Halla la derivada de:
   a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^{\sqrt{3}}$ b) $h(x) = e^{\ln x^3}$ c) $g(x) = e^{\ln(x^3 - 1)}$
   d) $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$ e) $y = \log_3\left(\dfrac{x+3}{x^2+3}\right)$
4. Halla la segunda derivada de las funciones siguientes:
   a) $g(x) = e^x \ln x^2$ b) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
5. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $y = \ln x$, si la pendiente de esta recta es 1.

Unidad 2

Producto integrador de la unidad

Resuelve el siguiente problemario y realiza una autoevaluación del aprendizaje logrado.

1. Usa la definición de derivada para demostrar que si f y g son dos funciones derivables, entonces $(f+g)' = f' + g'$.

2. Determina en el punto indicado, las ecuaciones de la recta tangente y normal a las siguientes curvas.

   a) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto $P(x, 3)$ de su gráfica.
   b) $f(x) = x^3 - 2x + 5$ en el punto $P(x, 0)$ de su gráfica.
   c) $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto de intersección con el eje X.
   d) $y = e^{2x} + 5$ en el punto de intersección con el eje Y.

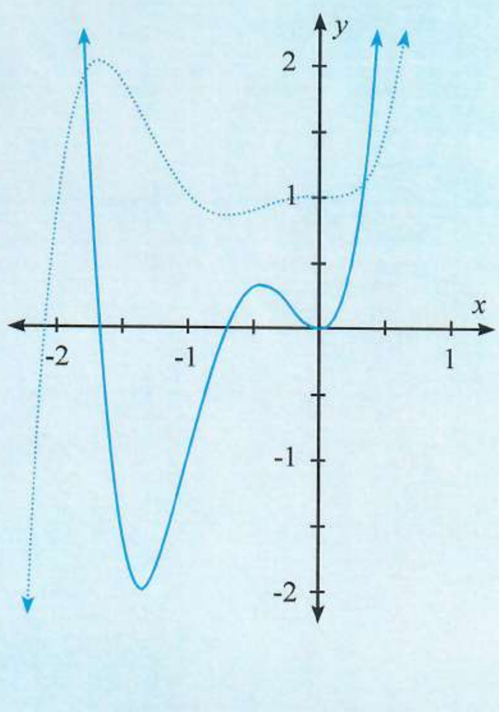
3. Si $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentra la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados.

   a) $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t$; $t = -2$, $t = 2$ segundos.
   b) $s(t) = \dfrac{t}{t+2}$; $t = -1$, $t = 0$ segundos.
   c) $s(t) = t + \operatorname{sen}(\pi t)$; $t = 1$, $t = 3/2$ segundos.
   d) $s(t) = e^{2t+1} + 2t^2$; $t = 2$ segundos.
   e) $s(t) = \ln(3t + 4)$; $t = 2$ segundos.
   f) $s(t) = \sqrt{t} + t$; $t = 2$ segundos.

4. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 7 pies^3/min. Si la presión se mantiene constante. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando éste es de un pie?

5. Una mujer que trota con rapidez constante de 10 km/h pasa por un punto P hacia el norte. Diez minutos más tarde un hombre que trota a razón constante de 9 km/h pasa por el mismo punto hacia el este. ¿Cuán rápido varía la distancia entre los trotadores veinte minutos después de que el hombre pasa por P?

6. Usa la definición de derivada para identificar la función y su derivada.



7. Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x^8 + 3x^5 + 5x^4 - 8$

b) $y = x^2(x - 3)$

c) $y = \dfrac{2x^2 - x}{3x^4 - 2x - 7}$

d) $y = x^4\left(1 + \sqrt{x}\right)$

e) $y = \left(\dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + 3}\right)^{2/5}$

f) $y = 3\operatorname{sen} x - 2\sec x$

g) $y = x^2 \tan x - 4 \cot x$

h) $y = \cos^2 (5x)\cdot\cot (2x)$

i) $y = \arccos (3x^5)$

j) $y = \operatorname{arccot} \sqrt{x + 1}$

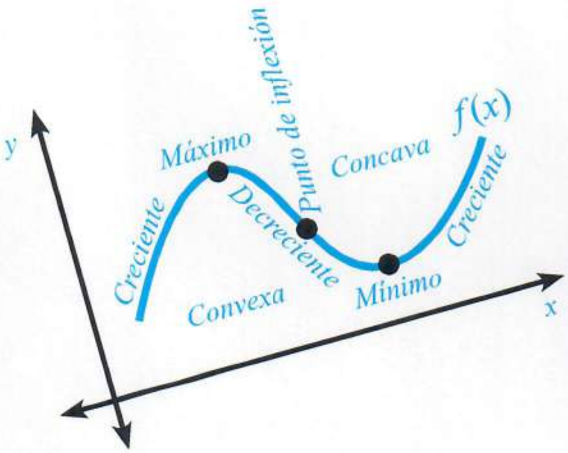
k) $y = e^x\cdot\ln(x + 1)$

l) $y = \ln\left(\dfrac{1 - 2x}{x + 5}\right)$

m) $y = \dfrac{e^{7x} + \ln x}{x}$

n) $y = \tan\left(\sqrt{x} + e^x\right)$

Unidad 3



Aplica en forma crítica y reflexiva las derivadas de las funciones en la modelación, formulación y resolución de problemas en diversos contextos y hace una evaluación de los resultados.

Propósito de la unidad

Atributos de competencias genéricas a evaluar	Criterios de aprendizaje
1.2 Muestra un desarrollo socioafectivo acorde con la etapa evolutiva en la que se encuentra, y canaliza sus inquietudes de tipo emocional con las personas e instituciones adecuadas.	• Asume la toma responsable de desión de manera autogestiva orientada al alcance de los logros académicos y personales.
5.7 Propone soluciones a problemas del orden cotidiano, científico, tecnológico y filosófico.	• Propone soluciones acertadas y viables frente a problemas reales o hipotéticos.
8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.	• Colabora en equipos de trabajo, compartiendo los logros con el resto de los equipos participantes en un mismo grupo.

Competencias disciplinares extendidas a evaluar	Criterios de aprendizaje
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	• Argumenta la representación gráfica de funciones algebraicas y trascendentes mediante el criterio de la primera derivada y segunda derivada.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	• Analiza la relación de las variables que optimizan una función, calculando valores extremos locales o globales.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	• Interpreta la gráfica de una función para obtener la gráfica de la primera y segunda derivada.

Aplicaciones de la derivada y problemas de optimización

Unidad 2

En la unidad anterior hemos abordado algunas aplicaciones de la derivada en temas de la propia matemática, físicos, biológicos o financieros. Pero aún el concepto de derivada y sus propiedades proporcionan muchas posibilidades de obtener más información sobre el comportamiento de las funciones y su aplicación a la solución de problemas en diferentes campos.

En esta unidad aprenderás cómo hacer el análisis de funciones y de las gráficas que las representan, a partir de estudiar propiedades que se obtienen de sus derivadas, así como aplicar lo estudiado sobre derivadas a la solución de problemas en diversos contextos.

3.1 Aplicación de la derivada al análisis y representación gráfica de funciones

Propósito

Analiza el comportamiento de funciones y de sus representaciones gráficas, a partir de estudiar propiedades que se obtienen de sus derivadas.

3.1.1 Monotonía de las funciones en un intervalo

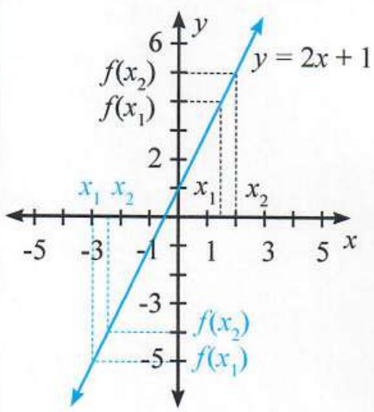
Decimos que una función continua $f(x)$ en un intervalo $I \subset R$ es **creciente** en ese intervalo (en sentido estricto) si para todo x_1 y x_2 pertenecientes a I, con $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) < f(x_2)$.

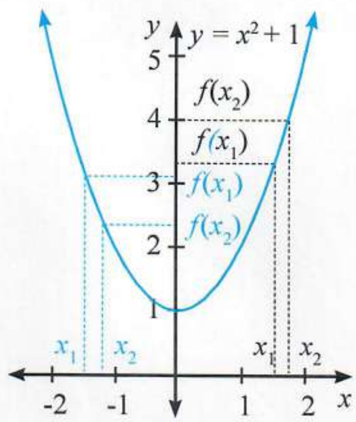
Análogamente, se dice que una función continua $f(x)$ en un intervalo I es **decreciente** en ese intervalo (en sentido estricto) si para todo x_1 y x_2 pertenecientes a I, con $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) > f(x_2)$.

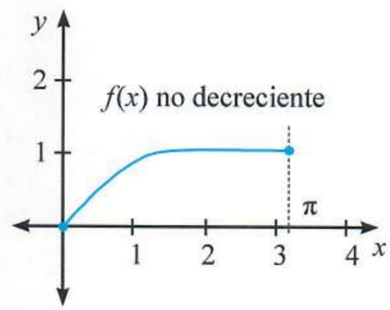
Cuando para $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$, se dice no decreciente. Y si para $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$, se dice no creciente. En todos estos casos hablamos de la **monotonía de la función** $f(x)$.

Ejemplo 1

Analicemos el comportamientode las siguientes funciones, de acuerdo con sus gráficas.

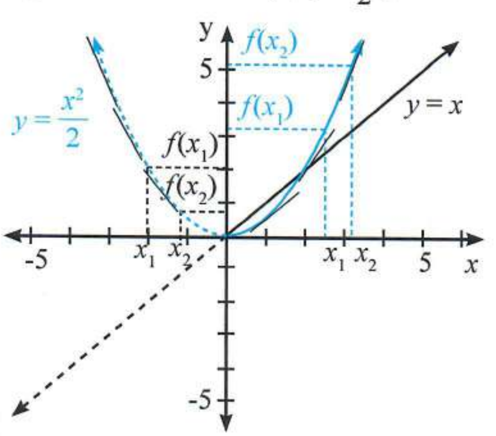






- $f(x) = 2x + 1$ es creciente en los intervalos (-4, -2) y (1, 3) (de hecho sobre todo el eje real).
- $f(x) = x^2 + 1$ es creciente en el intervalo (1, 2) y decreciente en (-2, -1).
- La función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$, es no decreciente en el intervalo $[0, \pi]$.

Buscaremos ahora, si existe una relación entre el comportamiento de la derivada de una función en un intervalo y el carácter creciente o decreciente de la función en dicho intervalo; para ello analicemos la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la de su derivada que es $f'(x) = x$.

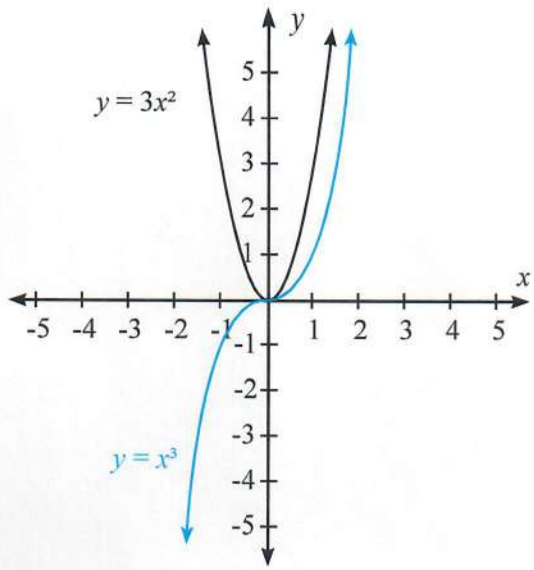


En la figura se observa la representación tanto de la parábola como de la recta; nota que la recta $y = x$ no es la recta tangente a ningún punto de la parábola, sino que representa el valor de todas las pendientes de las rectas tangentes a cada punto de la parábola.

Para $x > 0$ todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola son positivas y la función es creciente. Para $x < 0$ todas las pendientes de las rectas tangentes a la parábola son negativas y la función es decreciente.

Observa que la derivada es igual a cero para $x = 0$ y este es el punto en que cambia la monotonía de la función de decreciente a creciente, en la medida que recorremos el eje de las x de los valores negativos a los positivos de x.

Actividad 3.1



Sea $f(x) = x^3$ y a partir de su gráfica analicemos el comportamiento de esta función en relación con el signo de la derivada.

La derivada de $f(x)$ es ______________________

¿Qué signo tiene la derivada, para $x > 0$ y $x < 0$?

______________________________.

Consideremos el intervalo $I = (0, +\infty)$. Cualquiera sea el punto $x \in I, f'(x)$ __________ y la función es ________

Para $x \in I = (-\infty, 0), f'(x)$ __________ y la función es ____________

La parábola $y = 3x^2$, respecto al comportamiento de $y = x^3$ representa ____________________

El análisis realizado en el Ejemplo 1 y en la Actividad 3.1 nos lleva a un resultado más general, que expresa lo siguiente:

Sea $f(x)$ derivable en un intervalo $I \subset R$. Para todo x perteneciente a I:

a) *Si* $f'(x) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo I.

b) *Si* $f'(x) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo I.

Es decir, para saber si una función crece o decrece en un intervalo, basta determinar el signo de la derivada de la función en dicho intervalo.

Ejercicios 3.1

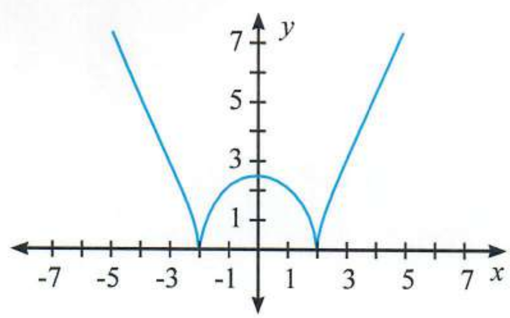
1. Dada la función representada por el gráfico que se adjunta, estima los intervalos en que es creciente o decreciente.

   Es creciente en

   ____

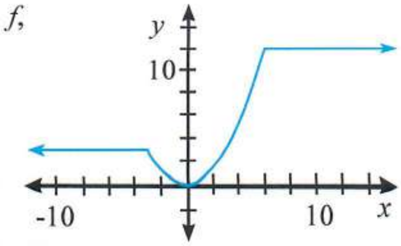
   Es decreciente en

   ____



2. Una función continua $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-5, 1]$, tiene un cero en $x = 1$, decrece en $[1, 4]$ y vuelve a crecer en $[4, 8]$ cortando el eje X en $x = 6$. Traza un esbozo de una función $f(x)$ que cumpla con esas condiciones.

3. Dada la representación gráfica de una función f, como la de la figura, su comportamiento en:



a) $0 \leq x \leq 6$, es ______________________

b) $x < -3$, es ______________________

c) $x > 0$, es ______________________

d) $-3 \leq x \leq 0$, es ______________________

e) Determina una expresión por partes de la función f, sabiendo que en el intervalo $-3 \leq x \leq 6$ es una función cuadrática.

f) ¿Es f derivable en $x = 1$? Calcula $f'(1)$ y compara ¿Se corresponde el valor de la derivada en ese punto con el carácter creciente o decreciente de la función en el intervalo al que pertenece $x = 1$?

4. Representa gráficamente $f(x) = (x - 1)^3$ y determina si es creciente o decreciente en:

a) $(-\infty, 1)$ b) $(1, +\infty)$ c) $(-1, 1)$

5. Haz la representación gráfica de $y = -(x - 2)^2 + 4$. Determina su comportamiento para:

a) $x < 2$

b) $x > 2$

c) Analiza qué sucede en $x = 2$.

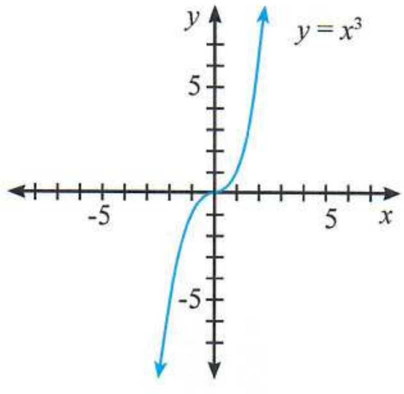
d) ¿Qué se puede decir de la derivada de $f(x)$ en cada una de las situaciones anteriores?

Unidad 2

3.1.2 Extremos locales y globales de una función

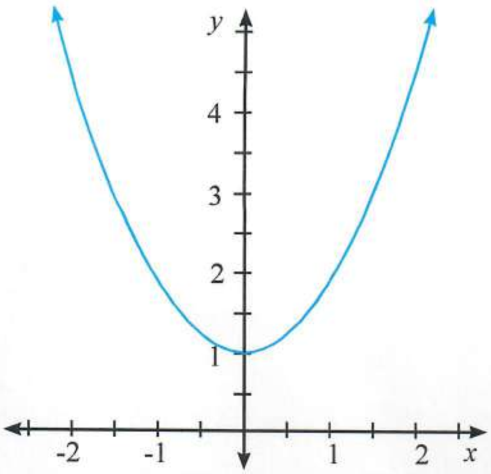
En la vida cotidiana existen muchas referencias a expresiones relacionadas con valores máximos o mínimos en determinadas situaciones. Por ejemplo, la máxima temperatura en que puede estar almacenado un cierto medicamento, cómo lograr el rendimiento máximo de un cultivo en una determinada superficie con un mínimo de fertilizantes, cuál es el máximo de ganancias que se puede obtener en una inversión o calcular el mínimo de materiales necesarios para que una construcción cumpla los parámetros requeridos.

Todas esas situaciones frecuentemente pueden describirse matemáticamente a través de funciones, y se trata entonces de estudiar cómo calcular para dichas funciones, los valores máximos o mínimos que pueden alcanzar y a eso vamos a dedicar esta sección.



Sin embargo, no se puede afirmar que todas las funciones alcanzan valores máximos o mínimos. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, como se observa en la gráfica, no tiene ningún mínimo o máximo, cuando la consideramos sobre todo su dominio, el conjunto de los números reales.

Pero si restringimos su dominio a un intervalo, por ejemplo, $I = (-3, 0]$, la función tiene un máximo en $x = 0$, que es 0, pero no tiene un mínimo.



La función $y = x^2 + 1$, tiene un mínimo en $x = 0$ y su valor es $y(0) = 1$, ya sea se considere sobre un intervalo, por ejemplo $I = (-1, 3)$, o sobre todo el eje real. En esos casos se dice que es un mínimo absoluto.

Por otro lado, esta función no tiene un máximo, pues para valores crecientes o decrecientes de x, sus imágenes crecen indefinidamente.

Por lo anterior, vamos a precisar algunos conceptos relacionados con los extremos (máximos o mínimos) que puede tener una función, teniendo en cuenta el dominio sobre el cual se consideren, así como las características propias de la función.

Sea $f(x)$ una función numérica y consideremos cualquier intervalo I incluido en su dominio, en particular el propio dominio de $f(x)$, así como un punto c perteneciente a I. Entonces

a) $f(c)$ es un máximo absoluto de f en I, si $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

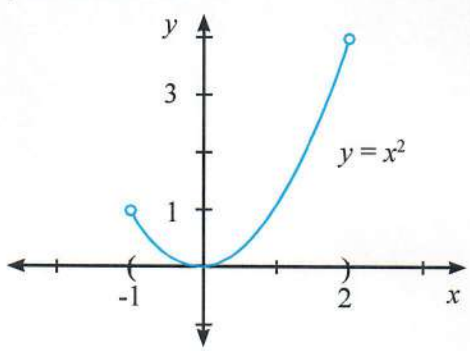
b) $f(c)$ es un mínimo absoluto de f en I, si $f(c) \leq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

Unidad 2

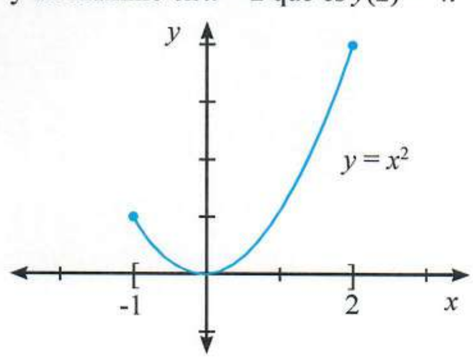
Ejemplo 2

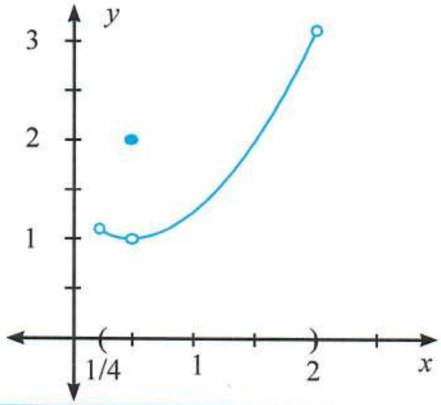
Ya vimos dos ejemplos que muestran que estos extremos pueden o no existir. Veamos algunos más.

La función $y = x^2$ sobre el intervalo abierto $(-1, 2)$ tiene un mínimo en 0 que es $y(0) = 0$ y no tiene máximo.



La función $y = x^2$ sobre el intervalo cerrado $[-1, 2]$ tiene un mínimo en 0 que es $y(0) = 0$ y un máximo en $x = 2$ que es $y(2) = 4$.





$$y = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1, & \left\{ x \in R \mid \frac{1}{4} < x < 2, x \neq \frac{1}{2} \right\} \\ 2, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es una función discontinua.

No tiene máximo, ni mínimo.

Si estuviera definida en el intervalo $(\frac{1}{4}, 2]$, ¿tendría máximo? ¿Cuál sería el valor del máximo?

Como pudiste apreciar en los ejemplos anteriores, algunas funciones tienen valores extremos, pero otras no, en dependencia del tipo de intervalo que se considere y del tipo de función. Por una parte, si la función es contínua, ello garantiza que recorra sin interrupción todos los puntos $P(x, f(x))$, que se correspondan con el dominio de f. En particular, si se trata de un intervalo cerrado $I = [a, b]$, la función alcanza todos los valores para las x pertenecientes a I, incluyendo a y b.

Es por eso que podemos enunciar la siguiente propiedad

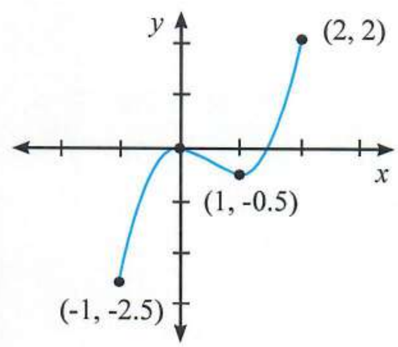
> Si $f(x)$ es continua sobre un intervalo cerrado $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto sobre dicho intervalo.

Es decir, existe un punto c_1 perteneciente al intervalo $[a, b]$, tal que $f(c_1) \geq f(x)$ para toda x del intervalo $[a, b]$ y es un máximo absoluto, así como un punto c_2 perteneciente al intervalo $[a, b]$, tal que $f(c_2) \leq f(x)$ para toda x del intervalo $[a, b]$ y es un mínimo absoluto. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3

Observa la gráfica de la función

$$y = \frac{2x^3 - 3x^2}{2}, \; -1 \leq x \leq 2$$



Para $x = 2$ esta función tiene el valor máximo absoluto $f(2) = 2$ y mínimo absoluto en $x = -1$, con $f(-1) = -2.5$.

Si el intervalo fuese abierto $(-1, 2)$ no tendría ni máximo ni mínimo. ¿Qué pasaría si se considera el intervalo abierto en sólo uno de los extremos?

Observa con atención si en la gráfica hay más puntos que llamen la atención. En efecto, si analizamos un intervalo reducido más próximo al punto $P(0, 0)$, entonces en ese punto hay un máximo, que es $f(x) = 0$ y en un intervalo próximo a $P(1, 0)$ hay un mínimo, que es $f(1) = -0.5$.

Lo anterior nos lleva a definir el concepto de extremos locales o relativos.

> $f(c)$ se llama máximo local o relativo, si existe un intervalo abierto I que contiene a c, en el que $f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a I.

De igual manera

> $f(c)$ se llama mínimo local o relativo si existe un intervalo abierto I que contiene a c, en el que $f(c) \leq f(x)$, para todo x perteneciente a I.

Una función puede tener varios máximos locales y el mayor de ellos será el máximo absoluto. Análogamente, si existen, el menor de los mínimos locales será el mínimo absoluto.

Unidad 2

Actividad 3.2

Sea $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x + 1$, $-1 \leq x \leq 4$,

cuya representación se muestra en la gráfica.

De acuerdo con la gráfica:

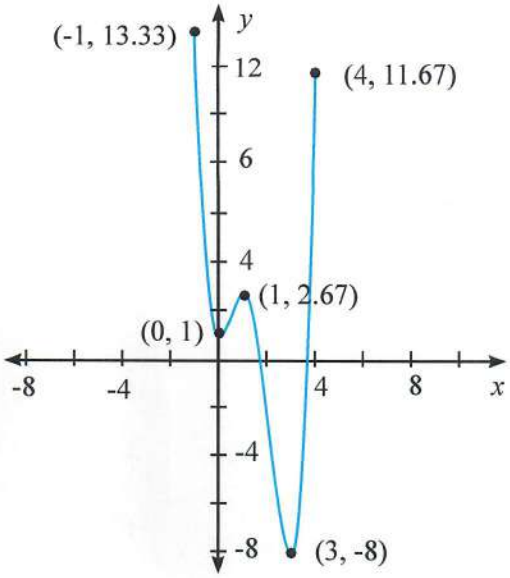
La función tiene máximo absoluto en __________

y mínimo absoluto en ____________________.

Hay un mínimo relativo en ________________.

Si hay algún otro máximo local, está en _________.

Escribe un intervalo donde $f(1)$ sea un máximo relativo o local ____________________________



Hasta aquí hemos partido de condiciones que nos dicen de la existencia o no de extremos absolutos o locales en un intervalo dado, pero aún no tenemos un procedimiento para calcular, si los tiene, los extremos de una función, y es aquí donde la derivada, cuando existe, viene en nuestro auxilio.

Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

En efecto, si por ejemplo, $f(x)$ tiene un máximo local en c, $f(c) \geq f(c+h)$, cualquiera que sea el valor de h, positivo o negativo. Por tanto, $f(c) - f(c+h) \geq 0$. Si tomamos $h > 0$, dividimos por h y recordamos los límites unilaterales, tenemos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Como f es derivable en c, el límite por la derecha coincide con el límite que define la derivada, luego

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Un análisis similar se obtiene cuando consideramos $h < 0$, con lo cual $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$, es decir se invierte la desigualdad y tomando ahora el límite por la izquierda

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Es decir, $0 \leq f'(c) \leq 0$, luego $f'(c) = 0$, como queríamos demostrar.

La propiedad que acabamos de demostrar asegura que si en un punto hay un extremo local, entonces en ese punto la derivada se anula, pero no que si la derivada se anula en un punto, entonces hay un extremo local en él, como es el caso de la función $f(x) = x^3$ cuya derivada $f(x) = 3x^2$, se anula en 0 y ya vimos que no tiene ningún valor extremo.

Incluso puede no existir la derivada en c, y sí haber un valor extremo en ese punto, como es el caso de la función valor absoluto de x, $f(x) = |x|$, en $x = 0$. Dibuja la gráfica correspondiente. ¿Qué valor extremo tiene?

Pero precisamente, estas son las dos situaciones en las que existe un valor extremo local de una función, es decir, valores en los cuales la derivada de una función se anula o ésta no existe y son llamados los **números críticos** de la función.

> Es decir, un número c perteneciente al dominio de un función $f(x)$ se llama número crítico de f, si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Los números críticos desempeñan un papel importante en la determinación de los máximos y mínimos de una función, ya que los extremos locales se presentan solamente en aquellos puntos en los que la derivada se anula o no existe, es decir en los números críticos.

Ejemplo 4

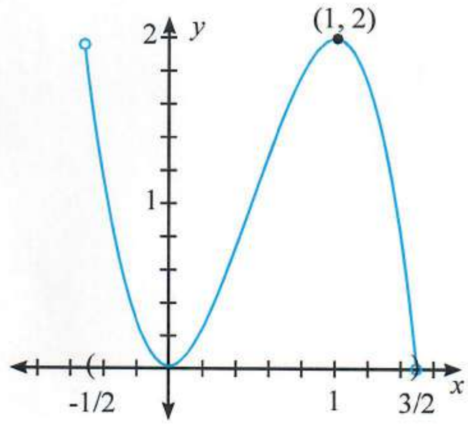
Determinar los extremos locales de la función $f(x) = -4x^3 + 6x^2$ en el intervalo abierto $(-1/2, 3/2)$.

Primero calculamos $f'(x)$ y la igualamos a cero. Así, obtenemos

$$f'(x) = -12x^2 + 12x = 0, \text{ o bien } 12x(-1 + x) = 0$$

de donde se obtiene que los números críticos son $x = 0$ y $x = 1$.

Se observa en la gráfica que en $x = 0$ hay un mínimo local cuyo valor es 0 y en $x = 1$ un máximo local igual a 2.



Actividad 3.3

Sea la misma función $f(x) = -4x^3 + 6x^2$, ahora sobre el intervalo cerrado $[-1, 3/2]$, y vamos a determinar si existen los extremos absolutos de f.

Del ejemplo anterior, ya sabemos que los números críticos son ____________________ cuyas imágenes por f, son ________________.

Ahora, calculamos los valores de f en los extremos del intervalo $f(-1) =$ ______ y $f(3/2) =$ ______. Comparando todos esos valores, se concluye que f tiene un máximo absoluto en ______________ y mínimo absoluto en ________, lo cual se corresponde con su gráfica.

Hemos visto, como resultado de realizar la Actividad 3.3, que puede haber más de un punto en el que se alcance un extremo, y también que los valores extremos pueden estar o no en los extremos del intervalo.

Comprueba por ejemplo, que la función sen x en el intervalo $[0, 2\pi]$, tiene máximo absoluto en $x = \pi/2$ y mínimo absoluto en $x = 3\pi/2$. Haz la gráfica y verifica.

De acuerdo con los ejemplos vistos anteriormente, podemos plantear una estrategia para determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, como sigue:

Sea $f(x)$ una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Hallar los valores de $f(x)$ en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$.
2. Determinar los valores de $f(x)$ en los números críticos de (a, b).
3. Comparar los valores encontrados. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

Ejemplo 5

Hallemos los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sobre $[0, 2]$.

1. Calculemos los valores de $f(x)$ en los extremos del intervalo: $f(0) = 0$ y $f(2) = \dfrac{2}{5}$
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{(1)(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

   Si $f'(x) = 0$, entonces $x^2 = 1$ y $x = \pm 1$, pero $x = -1$ no está en el dominio de esta función, es decir en $[0, 2]$, luego evaluamos la función solo para $x = 1$ y obtenemos $f(1) = 1/2$.
3. Comparamos los valores obtenidos: $f(0) = 0$, $f(2) = 2/5$ y $f(1) = 1/2$, luego $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$ con valor $f(0) = 0$ y un máximo absoluto en $x = 1$ con valor $f(1) = 1/2$.
4. Todo lo anterior lo puedes comprobar haciendo el gráfico de f.

Unidad 2

Ejercicios 3.2

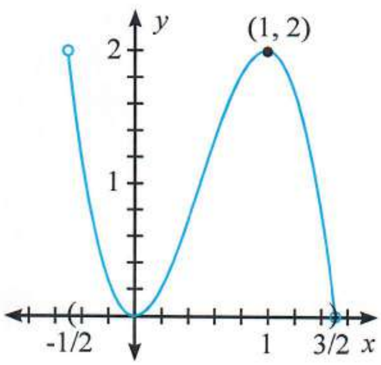
1. Si $f(x)$ es derivable sobre un intervalo I y $f'(x) \neq 0$, para todo x del intervalo I, ¿cuántos números críticos podrá tener?
2. Traza la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$ y halla, si existen, los extremos absolutos y relativos de f en los siguientes intervalos:

   a) $(-2, 2)$ b) $[-2, 2]$ c) $(-2, 2]$ d) $[-2, 2)$

   e) $(-\infty, +\infty)$ f) $(-\infty, 2]$ g) $[-2, +\infty)$ h) $[-1, 1]$
3. Halla los valores extremos absolutos de las siguientes funciones, si:

   a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ en $[0, 3]$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 6$ en $[-2, 3]$

   c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ en $[0, 2]$ d) $f(x) = \sqrt{x}\,(6 - x)$ en $[0, 6]$

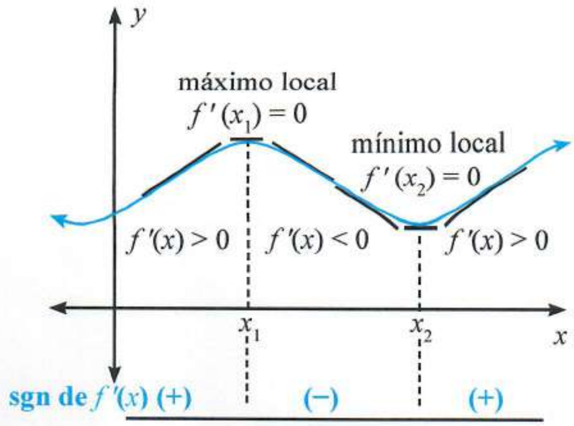


Vamos a continuar estudiando la gráfica de la función $f(x) = -4x^3 + 6x^2$, sobre el intervalo $(-1/2, 3/2)$. Ya sabes que en $x = 0$ hay un mínimo local cuyo valor es 0 y en $x = 1$ un máximo local igual a 2.

Observa que en los valores previos a $x = 0$, donde hay un mínimo local, la derivada correspondiente es negativa, por lo que la función es decreciente en esos puntos y en los valores posteriores a $x = 0$ la derivada es positiva y la función es creciente. Análogamente en el número crítico $x = 1$, donde hay un máximo local, la derivada correspondiente a los valores anteriores a x es positiva y la función es creciente; en los posteriores es negativa, por lo que la función es decreciente.

El análisis alrededor de los números críticos de una función, en la que esta tiene derivada, nos permite precisar la monotonía de la función. Si la derivada en los puntos anteriores a un punto x_1 del dominio de una funcion derivable es positiva y pasa a negativa en los puntos posteriores a x_1, entonces en x_1 hay un máximo local.

De la misma manera si alrededor de un punto x_2 la derivada pasa de negativa a positiva, entonces en x_2 hay un mínimo local.



Ejemplo 6

Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ investiguemos sobre sus extremos locales y monotonía.

La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = -2x + 2$ y si se iguala a 0 se tiene $x = 1$.

Como f es derivable en todo el eje real y la derivada solo se anula en ese punto, entonces $x = 1$ es el único punto crítico. Veamos qué sucede antes y después de $x = 1$.

Si consideramos $c < 1$, se cumple siempre que $f'(c) > 0$, ya sea c negativo o $0 \leq c < 1$. Si $c > 1$, entonces la expresión $-2c + 2$ siempre es negativa y $f'(c) < 0$.

Por tanto, la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, es creciente para todo $x < 1$ y decreciente para $x > 1$.

En $x = 1$ tiene un máximo local, que también es máximo absoluto. Comprueba haciendo la gráfica de la función cuadrática $f(x)$.

Una propiedad importante que poseen ciertas funciones y que resulta de utilidad para su representación gráfica se refiere a la característica de ser par o impar.

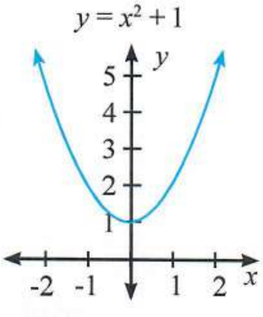
Cuando se estudia el comportamiento de una función numérica, si consideramos el punto $P(x, f(x))$, en ocasiones es importante analizar f cuando se toma el opuesto de x, es decir $-x$. Si $f(x)$ y $f(-x)$ son iguales, se dice que se trata de una función par. Si para $f(-x)$, se obtiene $-f(x)$, en ese caso se dice que la función es impar. También existen funciones que no son pares ni impares. Es decir:

Una función f es par si cumple que $f(x) = f(-x)$ en todo su dominio y es impar si $f(-x) = -f(x)$.

Geométricamente si no varía $f(x)$ al cambiar de x a $-x$, eso significa la simetría de la gráfica de f respecto al eje Y. La variación de $f(x)$ a $-f(x)$ al reemplazar x por $-x$, significa una simetría respecto al origen de coordenadas o una simetría de 180° respecto al origen de coordenadas.

Así, por ejemplo, son pares las funciones $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ y son funciones impares $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \text{sen } x$. Represéntalas gráficamente.

$y = x^2 + 1$



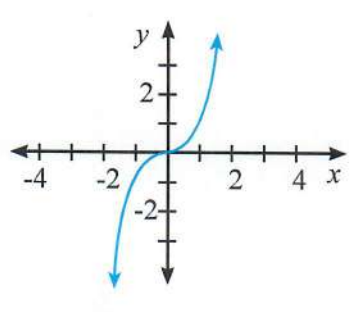
Analíticamente veamos, por ejemplo, que $f(x) = x^2 = (-x^2) = f(-x)$, por lo que la función $f(x) = x^2$ es par.

La función $f(x) = x^2 + 1$ es par, pues $f(x) = x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 = f(-x)$.

La función $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ es impar,

pues $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3} = -\dfrac{x^3}{3} = -f(x)$

$y = x^3$



Si una función es par y creciente para $x > 0$, entonces es decreciente para $x < 0$, como puedes apreciar en la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$.

Se cumple que si una función es par, su derivada es una función impar, siempre que exista la derivada. De forma similar, la derivada de una función impar es una función par.

En efecto, si, por ejemplo, una función es par y derivable entonces por la regla de la cadena

$$f'(x) = [f(x)]' = [f(-x)]' = (-1)f'(-x) = -f'(-x).$$

Así por ejemplo, la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ es par y su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$, es impar. La derivada de la función par, $\cos x$ es $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ que es impar.

Ejercicios 3.3

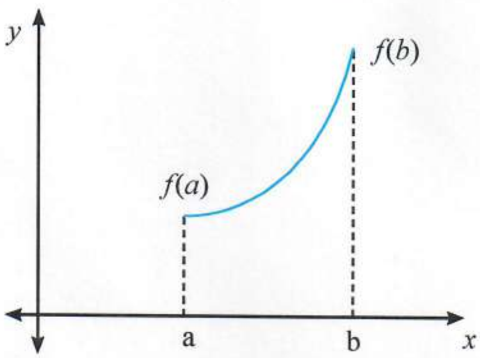
1. Haz el esbozo de una función f que tenga:
   a) Un mínimo local en $x = 2$, un máximo local en $x = 4$ y sean $f(2) = 3$, $f(4) = 6$, $f(3) = 4$.
   b) Un máximo local en $x = 2$, un mínimo local en $x = 4$ y sean $f(2) = 3$, $f(4) = 1$, $f(3) = 2$.
   c) Mínimos locales en $x = 2$, $x = 6$, un máximo local en $x = 4$ y sean $f(2) = 3$, $f(4) = 6$ y $f(6) = 5$.
2. Analiza en los ejercicios anteriores, en qué intervalos la función f es creciente o decreciente.
3. Si $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ determina si es par o impar y dónde es creciente o decreciente.
4. a) Comprueba que la función $f(x) = 5x^5 - 2x^3 + x$ es impar y que su derivada es par.
   b) Demuestra ahora que, en general, la derivada de una función impar es una función par.
5. ¿La función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ es par o impar? Calcula su derivada y analiza, además, su paridad.
6. En las siguientes funciones determina el dominio admisible para cada una y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento:
   a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 6$
   b) $f(x) = x^2 + \dfrac{54}{x}$
   c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6 - x}$
   d) $g(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$
   e) $h(x) = 1 + x^{2/3}$

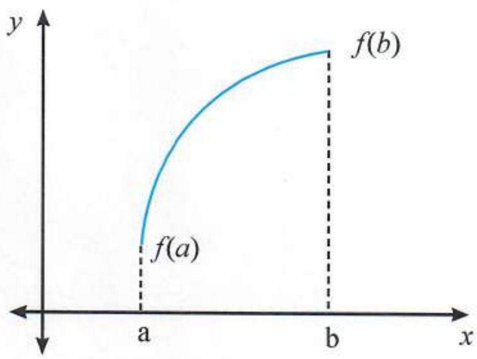
Unidad 2

3.1.3 Concavidad y puntos de inflexión

Hemos podido aprender la utilidad de la función **derivada de una función** para analizar su monotonía, es decir, los intervalos de crecimiento o decrecimiento y consecuentemente hacer el esbozo de su gráfica.

Supongamos que tenemos una función derivable $f(x)$ y que por el análisis de su derivada encontramos que es creciente entre dos puntos a y b de su dominio. Sin embargo, la manera en que crece desde a hasta b no se revela por el análisis de la derivada. Analicemos los siguientes gráficos:





Como se observa, entre a y b ambas funciones son crecientes, pero de forma distinta.

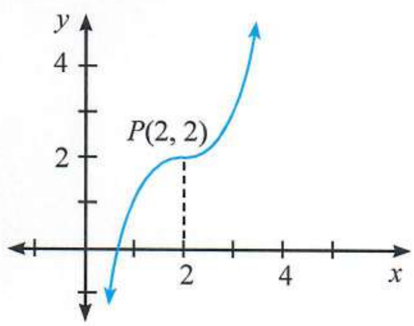
En el primer caso, se dice que la función es **cóncava hacia arriba o simplemente cóncava,** y en el segundo, **cóncava hacia abajo o convexa.** Veamos un ejemplo.

La gráfica adjunta representa la función $f(x) = (x - 2)^3 + 2$.

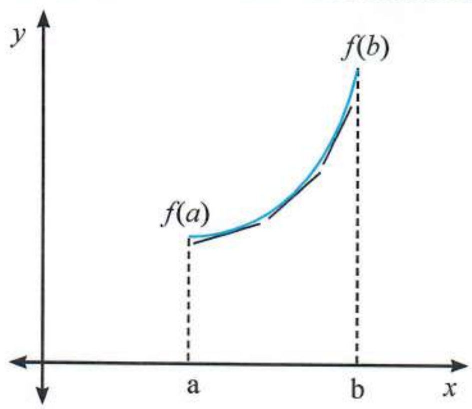
Esta función es convexa para todo x tal que $x < 2$ y es cóncava para toda x tal que $x > 2$.

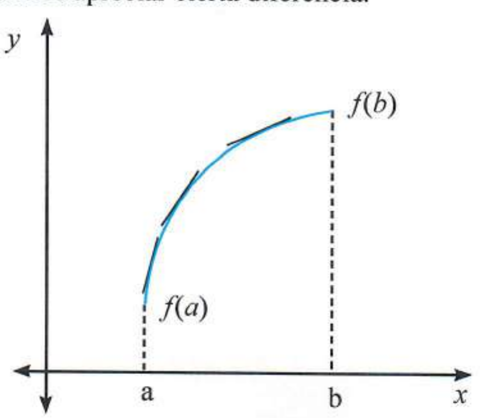
En el punto $P(2, 2)$ la función cambia de concavidad cuando eso ocurre a ese punto se le llama de una forma particular.

Dada una función $f(x)$, se dice que la función tiene un **punto de inflexión** en c si es continua en c y en $f(c)$ cambia el sentido de la concavidad de $f(x)$.



Ahora, vamos a hacer uso nuevamente de las derivadas, para precisar la forma en que se comporta una función cuando crece desde a hasta b. Para ello, trazamos las rectas tangentes en diferentes puntos en cada uno de los dos casos vistos anteriormente y podremos apreciar cierta diferencia.





Si observas con atención, verás que en un caso las rectas tangentes están por debajo de la gráfica de la función y en el otro que están por encima. En el primer caso esto significa que las pendientes de las rectas tangentes van creciendo, es decir que la función derivada, $f'(x)$, es creciente y por tanto la derivada de la función derivada (segunda derivada de la función f) es positiva.

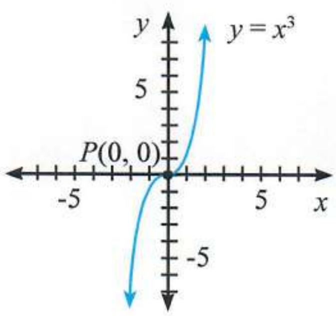
Este razonamiento nos lleva a la siguiente afirmación: si la segunda derivada de una función $f(x)$ es positiva, entonces $f'(x)$ es creciente, las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$ crecen, luego las rectas tangentes están por debajo de la gráfica de la función y decimos que es una función cuya representación gráfica crece de forma **cóncava hacia arriba o simplemente cóncava.**

En el segundo caso, en el que las rectas tangentes están por encima de la gráfica, significa que las pendientes de las rectas tangentes van decreciendo y la función $f'(x)$ es decreciente y, por tanto, la derivada de la función derivada (segunda derivada de la función f) es negativa. Luego si la segunda derivada de una función f es negativa, entonces, la derivada $f'(x)$ es decreciente, las rectas tangentes están por encima de la gráfica de la función y decimos que es una función cuya gráfica crece de forma **convexa o también cóncava hacia abajo.**

Podemos enunciar, entonces, la siguiente propiedad:

> Sea $f(x)$ una función que tiene segunda derivada en un intervalo abierto (a, b). Si para todo valor c del intervalo (a, b), se cumple que:
>
> a) $f''(c) > 0$ entonces la función f es cóncava en (a, b).
>
> b) $f''(c) < 0$ entonces la función f es convexa en (a, b).

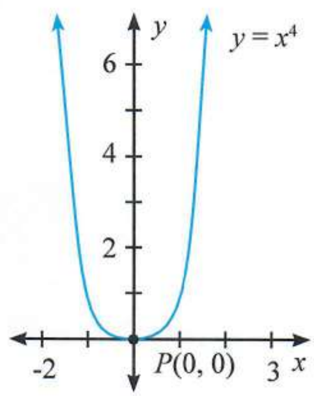
En el caso que $f''(c) = 0$, entonces, f puede tener un punto de inflexión en c. Es decir, si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión se cumple $f''(c) = 0$; pero bajo la condición $f''(c) = 0$, la función puede tener o no un punto de inflexión en c como veremos a continuación.



Para la función $f(x) = x^3$ se tiene $f''(x) = 6x$, por tanto es $f''(0) = 0$. En $P(0, 0)$ hay un punto de inflexión.

Para la función $f(x) = x^4$ se tiene $f''(x) = 12x^2$, por tanto es $f''(0) = 0$.

Pero en $P(0, 0)$ no hay un punto de inflexión, sino un mínimo.



Ejemplo 7

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3$. Vamos a analizar si tiene extremos locales y si tiene puntos de inflexión.

$f(x)$ es una función polinomial, por lo que tiene derivada de todos los órdenes.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$, significa que los números críticos de f son $x = 0$ y $x = 3$.

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$ y los posibles puntos de inflexión son $x = 0$ y $x = 2$.

Analicemos ahora por partes cada uno de estos valores. Primero, vamos a comparar los signos de la derivada alrededor de los números críticos y posteriormente los posibles puntos de inflexión.

Valor de x	Signo de la derivada $f'(x) = 4x^2(x - 3)$
$x < 0$	$-$
$0 < x < 3$	$-$
$3 < x$	$+$

Por tanto, $x = 0$ no es un extremo local de la función, pero en $x = 3$ la derivada pasa de negativo a positivo, por lo que es un punto en el que hay un mínimo local y su valor es

$$f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = -27.$$

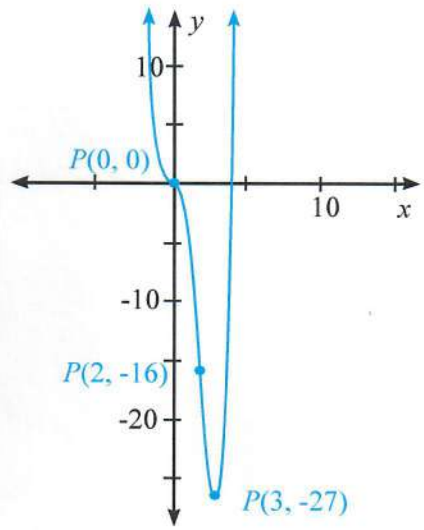
Es decir, hay un mínimo en $P(3, -27)$

Como lo que interesa es el signo que tiene la segunda derivada, se pueden seleccionar números específicos para evaluar su comportamiento en cada intervalo considerado, por ejemplo -1 para $x < 0$, 1 para $0 < x < 2$ y 4 para $x > 2$.

Valor de x	Signo 2da derivada $f''(x) = 12x(x - 2)$	Comportamiento
$x < 0$	$+$	Cóncava
$0 < x < 2$	$-$	Convexa
$2 < x$	$+$	Cóncava

Por tanto, en ambos hay puntos de inflexión, pues cambia la concavidad. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 2^4 - 4(2^3) = -16$, los puntos de inflexión son $P(0,0)$ y $P(2, -16)$.

El comportamiento de la función es como se muestra en el gráfico.



Unidad 2

Actividad 3.4

Vamos a partir de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ y estudiar su comportamiento.

Como función polinomial es ________________ sobre todo el eje real.

La primera derivada $f'(x) =$ ______________________ $= 6(x + 1)(x - 2)$, luego sus números críticos son __________.

La segunda derivada $f''(x) =$ _______________. Si se iguala a 0, f tiene como posible punto de inflexión a __________.

Se analiza a continuación el comportamiento de f alrededor de estos puntos.

Como en el ejemplo anterior para determinar el signo del producto $6(x + 1)(x - 2)$, basta seleccionar un valor cualquiera que se encuentre en cada uno de los intervalos determinados por los números críticos o el posible punto de inflexión y ver qué signo adopta dicho producto al evaluar. Tomemos, por ejemplo, -2, 0 y 3 para la primera derivada, así como y 0 y 1 para la segunda.

Valor de x	Signo de la derivada $f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$	Crece o decrece en ese intervalo
$x < -1$		
$-1 < x < 2$		
$2 < x$		

La función $f(x)$ crece en

____

y decrece en

________________________.

Valor de x	Signo 2da derivada $f''(x) = 6(2x-1)$	Comportamiento
$x < 1/2$		
$1/2 < x$		

La función es cóncava en ______________________

y convexa en ______________.

La segunda derivada, junto a la primera, nos proporciona una fuerte herramienta como criterio para determinar los extremos locales de una función sobre un intervalo abierto, ya que, si $f(x)$ es una función tal que tiene derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ en un intervalo abierto (a, b) y existe un c en (a, b) tal que $f(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c, y si $f''(c) > 0$, entonces en el punto c hay un mínimo. En síntesis, el signo que tenga f'' en c determina qué tipo de extremo local tiene en c.

En efecto, vamos a demostrar que si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, en un punto c de (a,b), entonces f tiene un máximo local en c. Por la definición de derivada y como $f'(c) = 0$, se tiene que

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0 \text{ , según lo supuesto.}$$

Bajo esa condición, existe un $h \neq 0$ tal que $\frac{f'(c+h)}{h} < 0$, pues si para todo h, $\frac{f'(c+h)}{h} \geq 0$, entonces $f''(c)$ no sería estrictamente menor que cero. Sea $c + h = x$ un punto de (a, b). Por tanto, si despejamos h y sustituimos, se obtiene $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$.

Si $x < c$, $x - c < 0$, luego, tiene que ser $f'(x) > 0$, para que el cociente sea menor que cero y si $x >$ c, $x - c > 0$, y por tanto tiene que ser $f'(x) < 0$. Es decir, en c la función pasa de creciente a decreciente, luego tiene en c un máximo local.

Análogamente se puede demostrar que si $f''(c) > 0$, tiene en c un mínimo local.

Ahora podemos resumir lo anterior en un criterio que resulta muy útil para determinar la existencia de extremos locales de una función:

> Si $f(x)$ está definida sobre (a, b) y tiene derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ en un intervalo (a, b), entonces para un valor c perteneciente al intervalo se cumple que:
>
> Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en c.
>
> Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en c.

Nota que las desigualdades para $f''(c)$ son estrictas; en caso de que la segunda derivada sea cero en un punto c, no se puede sacar ninguna conclusión sobre la existencia de un extremo local en c.

En efecto, sean por ejemplo, $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$. En ambos casos, tanto la primera derivada como la segunda se anulan en $x = 0$, y ya vimos que la función $f(x) = x^3$ es creciente sin extremos locales, y que en $x = 0$ tiene un punto de inflexión, mientras que la función $g(x) = x^4$, tiene en $x = 0$ un punto de mínimo que es igual a 0.

Ejemplo 8

Sea $f(x) = x^2 - 8x + 1$ y vamos a determinar si tiene extremos locales.

$f'(x) = 2x - 8 = 2(x - 4)$; luego, $f'(x) = 0$ implica que $x = 4$ es un número crítico. $f''(x) = 2$, es decir, la segunda derivada es una función constante, para cualquier valor de x.

Como $f'(4) = 0$ y $f''(4) = 2 > 0$, en $x = 4$ hay un mínimo y su valor es $f(4) = -15$.

A partir de lo estudiado hasta aquí, para determinar si una función tiene extremos locales en un punto de su dominio, cuentas con dos criterios, el llamado de la primera derivada, que consiste en determinar los puntos críticos y ver si antes y después en alguno de ellos la primera derivada cambia de signo; o el de la segunda derivada, que se refiere a analizar qué signo tiene la segunda derivada al evaluarla en los puntos críticos.

Actividad 3.5

Sea $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3$ y vamos a analizar el comportamiento de esta función en cuanto a monotonía, extremos locales, concavidad y puntos de inflexión, así como encaminar un método para este tipo de análisis.

Primero: Por ser una función polinomial f es ________________ sobre todo el eje real.

Segundo: Calculamos la derivada de f y se iguala a 0, para buscar los números críticos.

$f'(x) =$ ______________ $=$ ______________ $= 8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0.$

Luego los números críticos son: ____________

Tercero: Calculamos la segunda derivada de f y se iguala a 0, para buscar los posibles puntos de inflexión y estudiar la concavidad

$f''(x) =$ ________________ $=$ ________________ $= 24(x + 1)(x - 1) = 0$.

Entonces, los posibles puntos de inflexión son ________________________

Cuarto: Estudiamos el comportamiento de las derivadas en esos puntos encontrados.

Como la primera derivada tiene tres factores, estudiemos por partes los signos que se van obteniendo al considerar valores de x, incluidos en cada uno de los intervalos que determinan los números críticos. Por ejemplo: -2, -1, 1 y 2, respectivamente y recuerda que lo que se requiere no es el valor que se obtiene, sino el signo final de la expresión.

Valor de x	Signo de $8x$	Signo de $8x(x + \sqrt{3})$	Signo de $f'(x)$ $8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$	Comportamiento de f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$+$	$-$	decreciente
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$-$	$+$	creciente
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$-$	decreciente
$\sqrt{3} < x$	$+$	$+$	$+$	creciente

Por tanto, en $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo local, cuyo valor es $f(-\sqrt{3}) = -15$

en $x = 0$ hay un máximo local, cuyo valor es $f(0) = 3$

en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo local, cuyo valor es $f(\sqrt{3}) = -15$

Este resultado también lo podemos obtener aplicando el criterio de la segunda derivada. En efecto,

$f'(-\sqrt{3}) = 0$ y $f''(-\sqrt{3}) = 24[(-\sqrt{3})^2 - 1] = 48 > 0$ significa un mínimo en $x = -\sqrt{3}$.

$f'(0) = 0$ y $f''(0) = 24[(0)^2 - 1] = -24 < 0$ significa un máximo en $x = 0$.

$f'(\sqrt{3}) = 0$ y $f''(\sqrt{3}) = 24[(\sqrt{3})^2 - 1] = 48 > 0$ significa un mínimo en $x = \sqrt{3}$.

Para estudiar los posibles puntos de inflexión realizamos un análisis similar. Tomemos como valores para determinar los signos, los números -2, 0 y 2 respectivamente. Completa la tabla.

Valor de x	Signo de $24(x+1)$	Signo de f'' $24(x+1)(x-1)$	Concavidad
$x < -1$			
$-1 < x < 1$			
$1 < x$			

Hay puntos de inflexión en $x =$ __________ y __________

Los puntos de inflexión son $P =$ __________

¿Puedes trazar un esbozo de la gráfica de f con la información obtenida? ________________

Ejercicios 3.4

1. Demuestra aplicando la definición de derivada a la función f' que si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo en c.
2. En las funciones que se dan a continuación aplica en todos los casos los dos criterios para determinar si tienen algún extremo local en su dominio. Compara cual te resulta más factible de aplicar.
   a) $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$
   b) $h(t) = t^3 + 7t^2 + 6$
   c) $g(s) = 3s^4 - 4s^3$
   d) $f(x) = x(6 - x)^2$
3. Determina, si los tiene, los extremos relativos de la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.
4. ¿La función $f(x) = 6x^6$ tiene algún extremo? Justifica tu respuesta.
5. Halla los extremos locales y puntos de inflexión, si existen, de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = xe^x$, para x perteneciente al intervalo (-4, 4)
   b) $g(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$, para x en (0, 1)

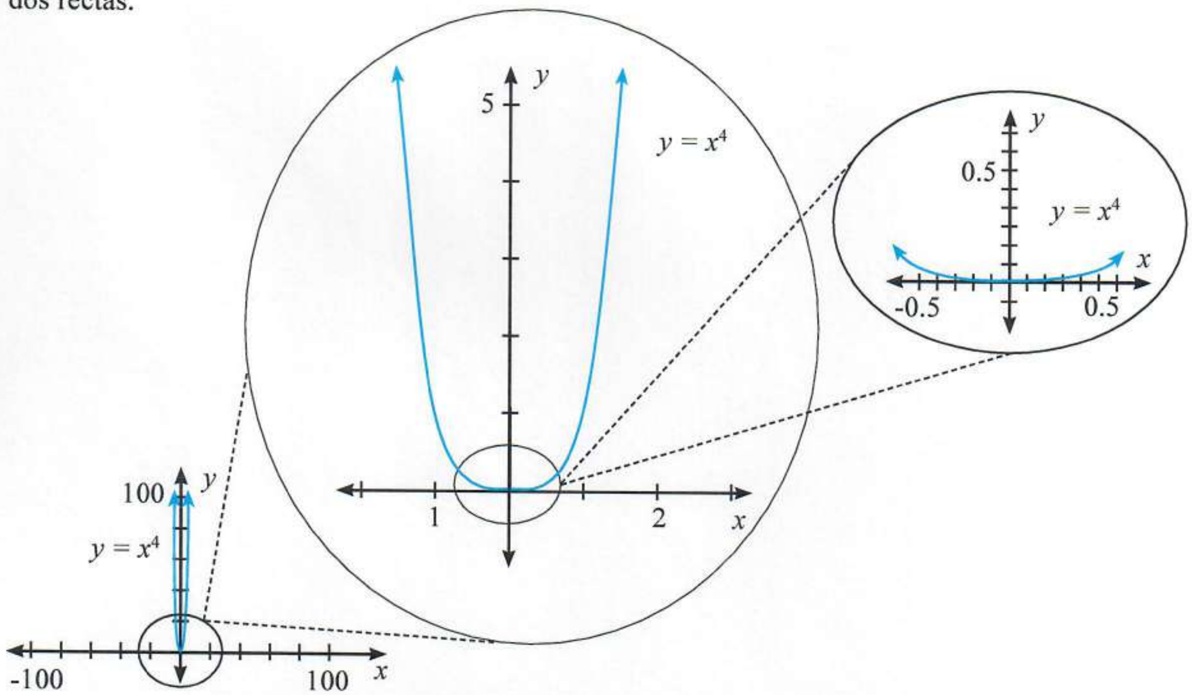
3.1.4 Representación gráfica de funciones

En lo estudiado hasta aquí, para el análisis de funciones nos hemos apoyado en varias ocasiones en su representación gráfica, obtenida de un graficador. Al iniciar ahora esta sección, pudieras preguntarte entonces, ¿para qué es necesario lo que vamos a hacer a continuación, si podemos obtener con un graficador la representación de una función, dada su expresión?

Por una parte, los programas en que se basan dichos graficadores, se basan precisamente en el análisis de todos esos elementos distintivos de una función que has estudiado, y otros más que la caracterizan, y en efecto, nos alivian de realizar esos cálculos en cuanto a laboriosidad y rapidez, por lo que es importante saber el fundamento en que se basan dichos graficadores.

Pero por otra parte, no siempre se obtienen, gráficamente, con el nivel de precisión que se puedan necesitar, datos exactos que un cálculo análitico nos puede proporcionar.

Por ejemplo, ya hemos analizado la función $f(x) = x^4$, previo al ejemplo 6 de esta unidad, en donde aparece su gráfica, obtenida de un graficador. Si observas solamente su gráfico pudiera pensarse que dicha función "toca" el eje X, en muchos puntos, independientemente de lo mucho que ampliemos la escala en los ejes coordenados, aunque ya sabemos por la vía analítica que tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. Si reducimos la escala, se distorsiona la representación gráfica al punto de parecer dos rectas.



En no pocos análisis, es importante lograr una representación gráfica de una función que se obtenga no sólo de un graficador, sino además, con la precisión que se puede obtener del cálculo analítico basado en sus propiedades. Por ello, vamos a precisar una estrategia que caracterice elementos fundamentales del comportamiento de una función, que han sido estudiados a lo largo de este curso, y que permitan lograr su representación gráfica. Partamos de un ejemplo.

Ejemplo 9

Sea la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^2-4)}$ y vamos a trazar la gráfica que representa dicha función.

1. Hay que precisar el dominio. El denominador se anula para $x = \pm 2$, por tanto
$$Dom\, f = (-\infty, 2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$
2. Para $x = 0$ es $y = 0$ y viceversa, luego la intersección con los ejes coordenados es $P(0, 0)$.
3. $f(x)$ es una función par, por tanto es simétrica respecto al eje Y.
4. Estudiemos qué pasa para valores muy grandes, y muy pequeños, de x.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^2-4} = \frac{4}{1} = 4 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{x^2-4} = \frac{4}{1} = 4$$

De lo anterior se obtiene que $y = 4$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

5. Como los valores $x = \pm 2$ anulan el denominador de la función $f(x)$, estudiemos los límites laterales en esos puntos

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{4x^2}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{4x^2}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{4x^2}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{4x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Por tanto $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la función $f(x)$.

6. Ahora veamos si $f(x)$ tiene números críticos

$$f'(x) = \frac{8x(x^2 - 4) - 4x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{8x^3 - 32x - 8x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-32x}{(x^2 - 4)^2}$$

Si $f'(x) = 0$ entonces $x = 0$ es el único número crítico. El signo de $f'(x)$ depende del numerador. Para $x < 0$, se tiene $f'(x) > 0$ y para $x > 0$ es $f'(x) < 0$.

Luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.

7. Calculemos ahora si hay posibles puntos de inflexión

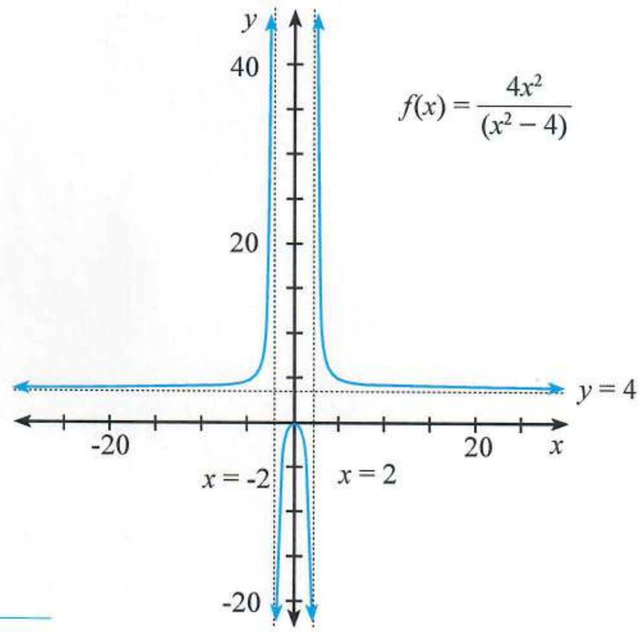
$$f''(x) = \frac{-32(x^2 - 4)^2 - (-32x)(2)(x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(x^2 - 4)(-32x^2 + 128 + 64x^2)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{32(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

Como el numerador es siempre positivo, el signo de $f''(x)$ depende del denominador.

Si $-2 < x < 2$, es $(x^2 - 4)^3 < 0$, luego $f''(x) < 0$ y en $(-2, 2)$ la función $f(x)$ es convexa.

Si $x < -2$ o $x > 2$, es $(x^2 - 4)^3 > 0$, luego $f''(x) > 0$. Por tanto en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ la función $f(x)$ es cóncava.

Con los resultados obtenidos se puede trazar la representación gráfica de la función, la que se muestra en el esquema.



Se puede apreciar que en efecto es una función par.

En la gráfica se han destacado las asíntotas, tanto verticales como la horizontal.

Actividad 3.6

Vamos a analizar la función $f(x) = x^3 - 7x + 6$, para hacer su representación gráfica.

1. $f(x)$ es una función polinomial, su Dominio es *Dom* f =______ y *Rango* f = ________.

2. Aplicando el método de Ruffini, se obtiene $f(x) = (x - 1)($ $)($ $)$, luego $f(x)$ tiene raíces en ______________________________ . Para $y = 0$, es x = ____________________.

3. Para valores crecientes (decrecientes) de x se cumple

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 7x + 6) =$ __________ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 7x + 6) =$ __________

4. $f(x)$ no tiene puntos de discontinuidad, luego no tiene _______________.

5. Analiza los números críticos. Para ello la ____________ derivada se iguala a ________
Si $f'(x) = 3x^2 - 7 = 0$, entonces los números críticos son: x_1 = _____ y x_2 = _______.

Valor de x	signo de $f'(x)$	Crece o decrece
$-\infty < x < -1.53$		
$-1.53 < x < 1.53$		
$1.53 < x < +\infty$		

Por tanto $f(x)$ tiene en _________ un ___________, cuyo valor es ___________
y en _________ un ___________, cuyo valor es ___________

6. Analiza si $f(x)$ tiene puntos de inflexión
$f''(x) = 6x$, luego en x = _______ hay un posible punto de inflexión.
Para $x <$ ____, se cumple $f''(x)$ _____ y $f(x)$ es ____________ en dicho intervalo.
Para $x >$ ____, se cumple $f''(x)$ _____ y $f(x)$ es ____________ en dicho intervalo.
Como $f(0)$ = _______, entonces el punto de inflexión es P(,).
Con toda la información obtenida dibuja un esbozo de la gráfica correspondiente a $f(x)$

Unidad 2

Vamos a resumir ahora, los pasos por lo que debes guiarte para el análisis de una función y consecuentemente hacer una gráfica apropiada de la misma. En síntesis:

1. **Dominio y Rango.** En particular, determinar qué valores pueden no ser admisibles para la variable independiente, en dependencia de la expresión de la función.
2. **Intersecciones con el eje *X* y el eje *Y*.** Para la intersección con el eje Y, se hace $x = 0$ es decir se calcula $f(0)$ y para la intersección con el eje X, $y = 0$ y se resuelve la ecuación. Esto último puede ser dificultoso en dependencia de la expresión de la función, por lo que puede no ser imprescindible.
3. **Paridad o simetría de la función.** Esto permite, en caso de que tenga alguna simetría, reducir a la mitad el análisis de la función.
4. **Asíntotas.** Su análisis permite ubicar adecuadamente en el sistema de coordenadas la curva correspondiente a la función estudiada.
5. **Extremos relativos o absolutos.** Se aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada, lo que lleva a obtener, a partir de los números críticos, los máximos y mínimos relativos que posea la función.
6. **Concavidad.** El signo que adopta la segunda derivada antes y después de los posibles puntos de inflexión, precisa si es cóncava o convexa en el intervalo que se esté valorando.
7. **Puntos de inflexión.** A partir del análisis anterior, se determina en qué puntos la función tiene un cambio en la curvatura.

Ejercicios 3.5

1. Dadas las siguientes funciones, trazar un esbozo de la gráfica correspondiente a partir del estudio de su comportamiento.

a) $y = -x^3 - x + 2$ b) $y = 3x^3 - 9x + 3$ c) $y = x^3 - 3x$

d) $y = x^4 + 2x^2$ e) $y = x^4 - 2x^2$ f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

g) $y = \dfrac{-x^2}{x^2 - 1}$ h) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

i) $y = x - \operatorname{sen} x$ j) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

Actividad intermedia:

Trabajo en equipo

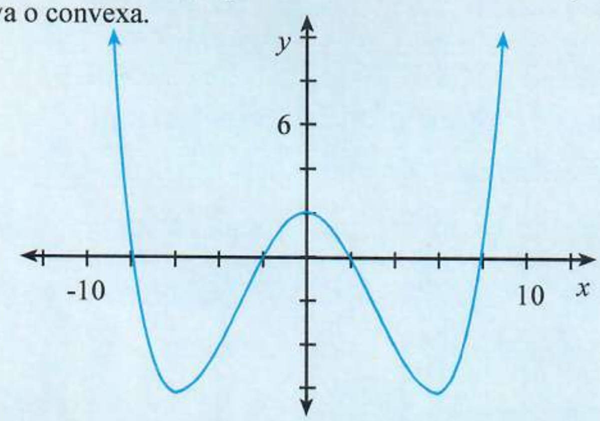
Resuelve el siguiente problemario y a partir de los resultados obtenidos realiza una autoevaluación de los aprendizajes logrados.

1. Expresa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Afirmación	V/F
1. El máximo absoluto es el menor de los máximos locales o relativos	
2. Los valores que hacen 0 la primera derivada se les llama números críticos	
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, la función f tiene un mínimo en c	
4. En un punto de inflexión cambia el sentido de concavidad de una función	
5. Si la segunda derivada se anula en c, entonces c es un punto de inflexión	

2. Determina los extremos locales de la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$
   a) Utilizando el criterio de la primera derivada
   b) Aplicando el criterio de la segunda derivada

3. Dada la gráfica adjunta, estima en qué puntos la función es creciente, decreciente, tiene extremos relativos, es cóncava o convexa.



4. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 10$, a partir de haber analizado sus características principales.

3.2 Aplicación de las funciones y la derivada a la modelación y resolución de problemas de optimización

Propósito

Aplica los conocimientos sobre derivadas y sus propiedades a la solución de problemas que se presentan en diferentes campos.

En cuantas ocasiones puedes haber escuchado frases como las siguientes: hay que sacar el máximo provecho de los recursos que se disponen, obtener el máximo de ganancia con la inversión realizada, lograr cubrir un máximo de superficie con una cantidad dada de metros de cerca. O también, emplear el mínimo de tiempo para cubrir una distancia dada, lograr el costo mínimo para producir algo.

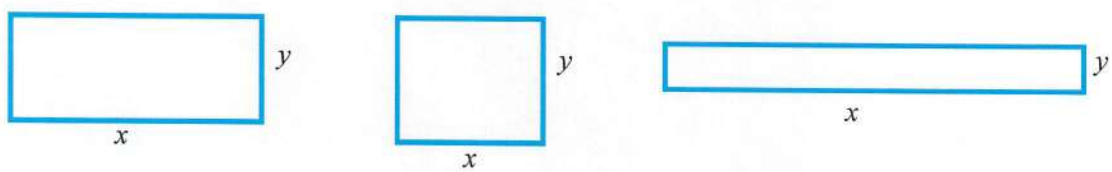
Todas estas frases encierran el interés de lograr optimizar el uso de los recursos en situaciones determinadas que se presentan en la realidad. Para lograr lo anterior la aplicación a este tipo de situaciones del cálculo diferencial constituye una herramienta muy útil que permite encontrar soluciones a los problemas planteados. Un ejemplo nos va a permitir adentrarnos en esta dirección.

Ejemplo 10

Cálculo de área máxima.

Supongamos que con 400 metros lineales de malla de alambre se quiere lograr cubrir el máximo de superficie rectangular posible, para obtener un área de pastoreo para ganado.

Ante todo recuerda que el área que abarca un rectángulo está delimitada por las dimensiones de su largo x y de su ancho y. Si bien hay diversas posibilidades para un rectángulo como se muestra en las figuras, se busca aquél que tenga el área máxima.



Conoces que el área está dada por la fórmula $A = xy$. Si bien, tanto el ancho como el largo son dos elementos a determinar, tanto la variable x como y, están también ligadas por la fórmula del perímetro de un rectángulo y como se quieren utilizar todos los metros de malla disponibles, se tiene que $P = 2(x + y) = 400$, de donde, por ejemplo, si se despeja y se obtiene $y = 200 - x$.

Sustituyendo en la fórmula del área, queda ésta como una función de una de las dos dimensiones del rectángulo, es decir, $A(x) = x(200 - x)$ y el problema se reduce a buscar el valor máximo de $A(x)$.

Si bien tenemos la función a la que debemos encontrar un valor máximo, es necesario precisar su dominio antes de seguir avanzando. En casos extremos, la variable x puede estar entre 0 y 200 m ya que el largo total de la malla que se quiere utilizar es 400 m. Si x sobrepasara los 200 m, el largo de la malla tendría que ser mayor que 400, pues el rectángulo tiene dos lados paralelos iguales que pasarían cada uno de los 200 m. Por tanto $0 \leq x \leq 200$.

Sabes también que para encontrar el valor máximo (o mínimo) de una función hay que determinar los números críticos, a partir de la primera derivada, y comparar el valor de la función en esos puntos con el valor de la función en los extremos del intervalo.

Calculemos la primera derivada de $A(x)$.

$$A'(x) = (1)(200 - x) + x(-1) = 200 - 2x = 2(100 - x)$$

Si $A'(x) = 0$, entonces $x = 100$, es el único número crítico que tiene esta función. En ese caso $y = 200 - x = 200 - 100 = 100$.

Veremos ahora los valores de $A(x)$, para los extremos del intervalo y para el número crítico encontrado.

Para $x = 0$, $A(x) = 0$

Para $x = 200$, $A(200) = 0$, ¿puedes justificar por qué?

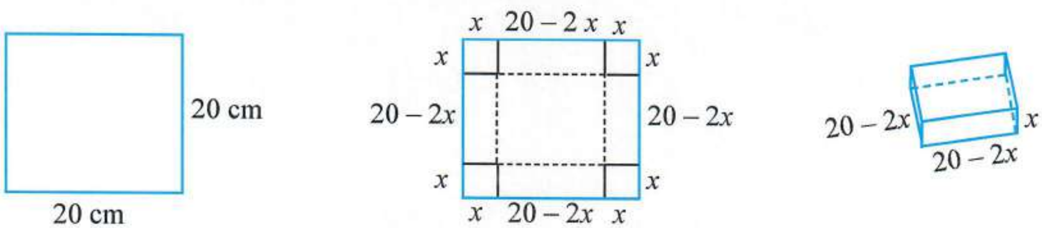
Para $x = 100$, $A(100) = (100\ m)(100\ m) = 10\ 000\ m^2$.

El área máxima se obtiene cuando todos los lados del rectángulo son iguales a 100 m, luego para una cerca de 400 m de largo, el área máxima resulta en un terreno de forma cuadrada de 100 m de lado.

Ejemplo 11

Cálculo de volumen máximo.

Se tiene una lámina de cartón cuadrada de 20 cm de lado y se quiere construir una caja sin tapa cortando en cada esquina de la lámina un cuadrado de lado x cm y doblando hacia arriba las caras laterales resultantes. Determina qué valor de x hace máximo el volumen de la caja resultante.



La caja resultante, se muestra en la figura, es un cubo de base cuadrada, cuyo volumen, como sabes, es el área de la base por la altura, $V = l^2h$, y en este caso $V(x) = (20 - 2x)^2x$, es decir, se trata de encontrar el valor de x que hace máximo la función $V(x)$.

El dominio de esta función esta entre 0 y 10, es decir $0 \leq x \leq 10$. ¿Puedes explicar por qué?

Calculemos la primera derivada de $V(x)$.

$V'(x) = 2(20 - 2x)(-2)x + (20 - 2x)^2(1) = (20 - 2x)(-4x) + (20 - 2x)^2 = (20 - 2x)(20 - 6x)$.

Si $V'(x) = 0$, entonces los números críticos son $x = 10$ y $x = 10/3$ y ambos están en el dominio de la función V.

Ahora evaluamos la función para los extremos del intervalo y los números críticos.

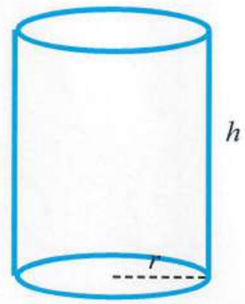
Como $V(0) = 0$, $V(10) = 0$ y $V(10/3) = 592.6\ cm^3$, el máximo volumen de la caja se obtiene para $x = 10/3\ cm$, es decir cortando cuadrados de $10/3\ cm$ de lado en cada esquina de la lámina.

Ejemplo 12

Cálculo de área mínima.

Se quiere construir un recipiente en forma cilíndrica con tapas y de una capacidad de 160 cm^3. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

La superficie del cilindro con tapas se compone del área lateral y del área de cada círculo que conforman las tapas.



Por tanto si A es el área del cilindro con tapas entonces $A = A_L + 2A_C$

De acuerdo con las fórmulas del área del cilindro y del círculo, se tiene $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$ Aquí el área depende tanto del radio como de la altura.

Pero también sabemos que el volumen del cilindro está dado por $V = \pi r^2 h,$ luego $h = V/\pi r^2.$

Si se sustituye h en la fórmula del área, se tiene entonces $A = 2\pi r^2 + 2\pi r(V/\pi r^2)$ y el área entonces es una función sólo de la variable r, es decir $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot (V/\pi r^2) = 2\pi[r^2 + 160/\pi r]$

El radio r debe ser mayor que 0, pero puede tomar cualquier valor tan grande o pequeño como se quiera; basta, en correspondencia, seleccionar h tan pequeño o grande como se necesite, por lo que estamos considerando un intervalo abierto para el radio r.

Buscamos, entonces, el valor de r para el cual $A(r)$ tiene un valor mínimo y para ello calculamos su primera derivada.

$$A'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{160}{\pi r^2}\right) = 2\pi\left(\frac{2\pi r^3 - 160}{\pi r^2}\right) = 2\left(\frac{2\pi r^3 - 160}{r^2}\right)$$

Los números críticos son aquellos para los cuales se anula la derivada, en este caso los que anulan el numerador, ya que r^2 es mayor que 0. Entonces de $2\pi r^3 - 160 = 0$ se obtiene

$$r = \sqrt[3]{\frac{80}{\pi}} \approx 2.94\ cm$$

Para determinar si este número crítico es un mínimo de la función $A(r)$ vamos a aplicar el criterio de la primera derivada.

Para $r = 2 < 2.94$, resulta $A'(2) = \dfrac{2\pi 2^3 - 160}{2^2} \approx -27.4 < 0$, luego $A(r)$ es decreciente antes del número crítico

Para $r = 4 > 2.94$, resulta $A'(4) = \dfrac{2\pi 4^3 - 160}{4^2} \approx 15.1 > 0$, luego $A(r)$ es creciente después del número crítico.

Por lo anterior en $r = 2.94$ la función $A(r)$ tiene un mínimo que es absoluto por ser el único. La altura correspondiente esta dada por $h = 160/\pi(2.94)^2 = 5.89\ cm$. Con estas dimensiones del radio y la altura se emplea el mínimo de chapa para construir el recipiente.

Actividad 3.7

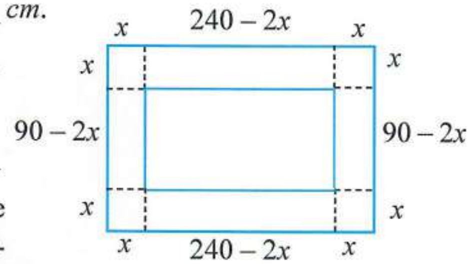
Para construir un depósito de agua, a partir de una lámina de acero de 2.4 m de largo por 90 cm de ancho, se cortan en cada esquina de la lámina cuadrados iguales. A continuación, por un procedimiento adecuado se dobla lo resultante en cada borde hacia arriba y culmina el proceso con una soldadura, hasta dejar sellado el depósito. Calcula qué dimensiones debe tener este depósito en largo, ancho y alto para lograr que admita el máximo de agua.

El largo de la lámina de 2.4 m es equivalente a ________ cm.

El volumen del cuerpo resultante es $V =$ ____________

Por tanto $V(x) =$ ______________________________

El dominio de la función $V(x)$, $Dom\ V(x) =$ ____________



Para obtener el máximo volumen, es decir, los valores que hacen máxima esta función hay que partir primero de determinar sus ______________________ y comparar el valor que se obtiene al evaluar la función en ellos, con los de los extremos del intervalo que define su dominio.

$V'(x) =$ ________________________________

Si $V'(x) = 0$, entonces se obtiene________________, pero de estos valores, solo _____ es un número crítico, pues el otro no pertenece a ________________________

Se evalúa la función tanto en ese punto como en los valores correspondiente a los extremos de la función y se obtiene_______________________________, luego el máximo se alcanza en ________________. Este valor coincide con la __________ del depósito. Se calculan las otras dos dimensiones del depósito y se obtiene _____________________________.

Actividad 3.8

En una fábrica de camisas se producen a diario x camisas y se venden a la empresa distribuidora a razón de 100 pesos por camisa. $C(x) = x^2 + 20x + 20$ es el costo total de x camisas diariamente para la fábrica. Determina la cantidad de camisas que se deben producir diariamente para obtener el máximo de ganancia por día.

La ganancia G está dada por la diferencia entre la venta diaria, es decir $V(x) = 100x$, y el costo de producir las camisas, es decir $G(x) = V(x) - C(x) =$ ____________________________.

De donde $G(x) = -x^2 + 80x - 20$.

Por tanto, se trata de encontrar qué valor hace máximo esta función.

Para hallar los números críticos se calcula ___________ y se obtiene ____________________

De donde $x =$ ________ es el único número crítico y como es $G''(x)$ _______, en ese número crítico se alcanza un ________________.

La ganancia se calcula sustituyendo ese valor en $G(x)$: ______________________________

Ejercicios 3.6

1. Con una lámina de cartón cuadrada de 30 *cm* de lado, se va a construir una caja sin tapa cortando en cada esquina de la lámina un cuadrado de lado x *cm* y doblando las caras laterales resultantes. Determina qué valor de x hace máximo el volumen de la caja resultante.

2. Un fabricante de cajas de cartón pretende hacer cajas sin tapas a partir de planchas cuadradas de cartón con área igual a 576 cm^2, cortando cuadrados iguales en los cuatro cantos y doblando los lados resultantes hacia arriba. Determinar la dimensión del lado del cuadrado que debe ser cortado para obtener una caja con el mayor volumen posible.

3. Para construir una pequeña caja sin tapa se parte de una lámina de cartón rectangular de 24 *cm* de largo por 9 *cm* de ancho y se cortan cuadrados idénticos en las 4 esquinas de la lámina para doblar lo resultante en cada lado hacia arriba. Dibuja un esquema que represente la acción a realizar y calcula las dimensiones en largo, ancho y alto que debe tener la caja para lograr un volumen máximo. ¿Cuál es ese volumen?

4. Se quiere cercar en forma rectangular, por 3 lados, un área de 1 800 m^2, aprovechando la pared trasera de una casa ¿Qué dimensiones de los lados de la cerca harán que se utilice el mínimo de metros de cerca?

5. A la orilla de una carretera recta se va a reservar un área para construir una cafetería, y hay disponibles 96 *m* de malla de alambre para cercarla. ¿Qué dimensiones de una cerca de forma rectangular, de 3 lados, que se construya harán que el área ocupada sea máxima?

6. Se va a cortar cartulina para imprimir un cartel, en forma rectangular, con 800 cm^2 de texto. Se quieren márgenes de 4 *cm* en la parte superior e inferior, así como 2 *cm* a cada lado, ¿Qué dimensiones debe tener la sección de cartulina que se corte para que el área abarcada sea mínima?

7. En una imprenta se van a confeccionar las invitaciones para una boda y la invitación va a tener 216 cm^2 de área impresa y con un margen superior e inferior de 2 *cm* y laterales de 3 *cm*. Halla las dimensiones del tamaño de la página que permita ahorrar más cartulina.

Producto integrador de la unidad

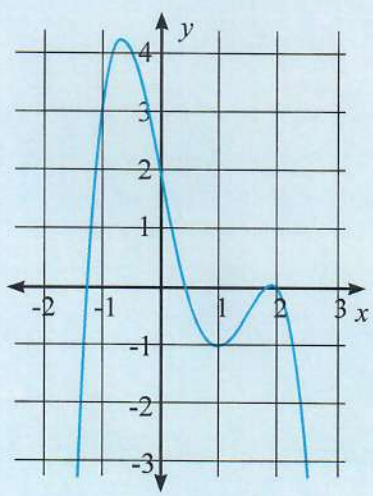
Resuelve el siguiente problemario y a partir de los resultados obtenidos realiza una autoevaluación de los aprendizajes logrados.

1. Usa los criterios de la primera y segunda derivada para graficar las siguientes curvas, y verifícalas trazando el gráfico en Desmos, Geogebra o Mathematics.

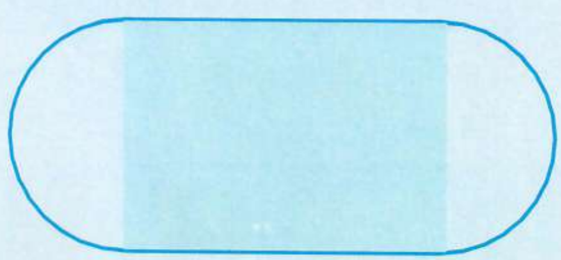
   a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ b) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x}$ c) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

   d) $y = 3\ \text{sen}^2 x$ e) $y = xe^x$

2. Analiza la siguiente gráfica y a partir de su comportamiento, grafica la primera y segunda derivada.



3. La pista de carreras que se muestra a continuación debe constar de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares. La longitud de la pista debe medir 2 *km*. Encuentra el diseño de la pista de modo que el terreno rectangular encerrado por la pista sea máximo.



Producto integrador del curso

Resuelve el siguiente problemario, y a partir de los resultados obtenidos, realiza una autoevaluación de los aprendizajes logrados.

1. Cálcula los siguientes límites, si es que existen.

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 + x - 6}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

   c) $\lim\limits_{x \to -4} (x^4 + x^3 - x + 1)$

   d) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{x - 9}$

   e) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(e^{x3 - x} - \ln(x^2 + 1)\right)$

   f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen }(5x)}{\text{sen }(3x)}\right)$

   g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{4/x}$

   h) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{\sqrt{x + 4}}$

2. Usa las fórmulas de derivación para determinar la derivada de:

   a) $f(x) = \text{-}\cos(4x) + 5e^{-10 \text{ sen } x}$

   b) $y = (x + 5)^3 \ln(x - 1)$

   c) $h(x) = \dfrac{(7x^3 - x)^2}{-5x^2 + 4}$

   d) $h(x) = (7x - 1)(x + 3)$

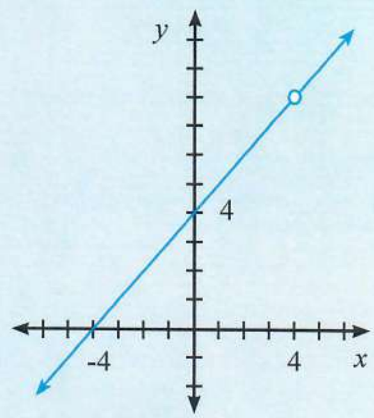
   e) $g(x) = x^8 + 3x^5 + 5x^4 - 8$

   f) $y = \sqrt{3x - x^2}$

   g) $y = \text{arcsen}(10x - 3)$

   h) $y = \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$

3. Análiza y grafica la función
   $$y = \frac{x^2 - 1}{x - 4},$$
   determinando monotonia, asíntotas y simetrías, puntos de inflexión, concavidades y valores (máximos o mínimos).



4. Se va a tender un ducto de gasolina desde una planta de PEMEX ubicada a un lado de un río de 400 metros de ancho hasta una industria que se encuentra al otro lado, 2000 metros río arriba de la planta.

   El costo de tender el ducto por debajo del agua es de 3 000 millones por kilómetro y sobre tierra es de 2 000 millones por kilómetro. Partiendo de la planta, el ducto seguirá la orilla del río una distancia de x kilómetros y luego lo cruzará en diagonal en línea recta directamente hasta la industria.

   a) Construye el modelo matemático que representa el problema.
   b) Determina el valor de x que minimiza el costo total.
   c) Explica el resultado obtenido.

5. Una persona, cuya estatura es de 170 *cm*, camina por la noche alejándose de un poste de alumbrado que tiene una altura de $8\,m$. Si la persona se aleja a una velocidad de 2 *m/seg*, ¿qué tan rápido cambia la longitud de su sombra?

6. Explora la representación gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$.

   a) A partir de interpretar la representación gráfica, expresa verbalmente si es continua o discontinua en $x = -4$.
   b) Usa la definición de continuidad para determinar si la función es continua en $x = 4$.

Producto integrador del curso

Bibliografía

Consulta para el estudiante y el profesor

A] Básica

1. Cuellar, J. A. (2014). *Matemáticas V: Cálculo diferencial* (Segunda ed.). México: Mc-GrawHill.
2. Fuenlabrada, S., Fuenlabrada Velázquez, I. R. (2013). *Cálculo diferencial* (Cuarta ed.). México: Mc-GrawHill.
3. Granville, W. A. (2014). *Cálculo diferencial e integral*. México: LIMUSA.
4. Larson, R. y Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2012). *Cálculo diferencial: Matemáticas I*. México, Mc-GrawHill.
5. Salazar Guerrero, L. Bahena Román, H., Vega Hernández, F. (2017). *Cálculo diferencial*. Grupo Editorial Patria.
6. Oteyza, E. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas: Cálculo diferencial e integral*. México. Pearson-Educación y UNAM.

B] Complementaria

1. Hoffmann, L. D, Bradley, G. L. Rosen, K. H. (). *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales* . (Octva ed.). México: Mc-GrawHill.
2. Purcell, E. J., Varberg, G. y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (Novena ed.). México. Pearson-Educación.
3. Smith, R. T. y Minton, R. B. (2003). *Cálculo diferencial e integral*. México, Mc-GrawHill.
4. Stewart, J. (2018). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México, Cengage Learning Editores.
5. Zill, D. G y Writhg, W. (2011). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. (Cuarta ed.). México: Mc-GrawHill.

Apéndice
Respuesta a ejercicios seleccionados

UNIDAD 1

Ejercicios 1.1

1. **a)** $\{(x, y)|\, y = x^2 + 2, x \in R\}; f(x) = x^2 + 2$
b) $\{(x, y)|\, y = 1/x - 1, x \in R\}; g(x) = 1/x - 1$

3. **a)** Representa a una función
b) No representa a una función
c) No representa a una función
d) Representa a una función

4. **a)** $f(-2) = -12,\ f(-1) = -7, f(1/4) = -3/4,$
$f(0) = -2$

b) $f(-3) = -1, f(-1/2) = -9/4, f(\sqrt{3}) = 2 + 3\sqrt{3}$

c) $f(-\pi) \approx 58.87, f(-0.4) = -0.272,$
$f(\sqrt[3]{2}) \approx -2.74$

d) $f(-2) = 1/9, f(-0.5) = 1/\sqrt{3}\ ,\ f(2) = 9,$
$f(5) = 243$

e) $f(4.5) \approx -0.301030,\ f(6) \approx -0.301029995,$
$f(100) \approx 1.98227$

f) $f(-2) = 2,\ \ f(1/4) \approx 0.2, f(\pi) \approx 0.7586,$
$f(-1.5) = 3$

g) $f(3) = \sqrt{3}\ , f(3/2) = 0, f(\sqrt{25}) = \sqrt{7}\ ,$
$f(8) = \sqrt{13}$

5. $g(6) = 11$

6. Gráfica 1-a, gráfica 2-c, gráfica 3-b

8. (0, -3), (5, 2). Coordenadas en las que $f(x)$ y $g(x)$ se intersecan.

Ejercicios 1.2

1. dominio, rango

2. Conjunto imagen o recorrido.
El rango y el contradominio no son necesariamente iguales, el rango es un subconjunto del contradominio.
La imagen de un valor del dominio es un número, mientras que el conjunto imagen es el conjunto de imágenes para todos los valores del dominio.

3. **a)** $dom\, f = R,\ rango\, f = \{y \in R|\, y \geq -1\}$
b) $dom\, f = \{x \in R|\, x \geq -1\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, y \geq 0\}$
c) $dom\, f = \{x \in R|\, x \neq -1 \text{ y } x \neq 1\}, rango\, f = R$
d) $dom\, f = \{x \in R|\, x > -1\}, rango\, f = R$
e) $dom\, f = R,\ rango\, f = \{y \in R|\, y > 1\}$
f) $dom\, f = R,\ rango\, f = \{y \in R|\, -1 \leq y \leq 1\}$
g) $dom\, f = \{x \in R|\, x \neq (2n+1)\pi/2,\ n \in Z\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$
h) $dom\, f = \{x \in R|\, x \neq n\pi,\ n \in Z\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$
i) $dom\, f = \{x \in R|\, x \neq (2n+1)\pi/2,\ n \in Z\},$
$rango\, f = R$
j) $dom\, f = \{x \in R|\, x \neq n\pi,\ n \in Z\}, rango\, f = R$
k) $dom\, f = \{x \in R|\, -1 \leq x \leq 1\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$
l) $dom\, f = \{x \in R|\, -1 \leq x \leq 1\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, 0 \leq y \leq \pi\}$
m) $dom\, f = \{x \in R|\, x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\},$
$rango\, f = \{y \in R|\, 0 \leq y \leq \pi,\ y \neq \pi/2\}$

n) $dom\,f = \{x \in R | \, x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$,
$rango\,f = \{y \in R | \, 0 \leq y \leq \pi, y \neq 0\}$

ñ) $dom\,f = \{x \in R | \, -\infty \leq x \leq +\infty\}$,
$rango\,f = \{y \in R | \, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$

o) $dom\,f = \{x \in R | \, -\infty \leq x \leq +\infty\}$,
$rango\,f = \{y \in R | \, 0 \leq y \leq \pi\}$

4. **a)** Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
Rango: $(-2, +\infty)$

b) Dominio: $[-3, 3]$; rango: $[-3, 2]$

c) Dominio: $(-\infty, +\infty)$; rango: $[-2, 8]$

d) Dominio: $(-6, 6]$; rango: $[-4, 6)$

5. **a)** $r(t) = 0.5t$; **b)** $A(t) = 0.25\pi t^2$;

c) Dominio: $[0, +\infty]$; rango: $[0, +\infty]$

6. **a)** El volumen es un valor no negativo, $v(t) \geq 0$, dominio: $(0, 251/49)$ y rango: $(0, 65)$.

b) La capacidad de la alberca es de 65 m^3 y tarda aproximadamente 7 horas y 10 minutos en vaciarse.

7. $C(x) = 8000 + 850x$, $x \in [0, 500]$
dominio: $[0, 500]$; rango $[8000, 433000]$

Ejercicios 1.3

1. A cada valor del rango le corresponde a un único valor del dominio.

2. No son uno a uno, puesto que para cada valor x del dominio (excepto en algún valor) le corresponden dos o más valores del rango. Lo cual implica que para cada valor $f(x)$ del rango (excepto en algún valor) es correspondiente de más de un valor del dominio.

3. uno a uno.

5. **a)** No tiene inversa; **b)** Si tiene inversa

c) No tiene inversa; **d)** No tiene inversa

6. **a)** Representa a una función uno a uno, por lo que si tiene inversa, $f^{-1}(x) = x/5 - 6/5$, dominio: R y rango: R.

b) No representa a una función uno a uno, por lo que no tiene inversa.

c) Representa a una función uno a uno, por lo que si tiene inversa, $f^{-1}(x) = 2x/(1-x)$, dominio: $R - \{1\}$ y rango: $R - \{-2\}$.

d) Representa a una función uno a uno, por lo que si tiene inversa, $f^{-1}(x) = (x^2 + 1)/2$, dominio: $[0, +\infty)$ y rango: $[0.5, +\infty)$.

e) No representa a una función uno a uno, por lo que no tiene inversa.

7. Dominio restringido: $[0, +\infty)$.

8. La representación gráfica de la función $g(x)$ no pasa la prueba de la recta horizontal, por lo que no tiene inversa.

9. Para $m \neq 0$.

10. $f^{-1}(x) = (x^2 + 1)/2$. Representa el número de aderezos vendidos.

Ejercicios 1.4

1. $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a c.

2. No necesariamente. Solamente implica que $\lim_{x \to c} f(x) = L$, lo cual es independiente de si $f(c)$ está o no definida.

3. El $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe, a menos de que $L = M$.

4. Cobra importancia cuando existen saltos (finitos o infinitos) o huecos.

Ejercicios 1.5

1. igual; igual, igual; igual.

2. No existe; no existe, si existe.

3. No necesariamente. No necesariamente.

4. La función está definida solamente por el punto (3, 1), por lo que no hay manera de aproximarse a 1, ni por la izquierda ni por la derecha.

6. **a)** No existe; **b)** 1; **c)** No existe, **d)** 3; **e)** -1

7. **a)** 0; **b)** 2.3; **c)** No existe; **d)** No existe

8. **a)** 0; **b)** -3; **c)** 0; **d)** 0

9. **a)** 1/6; **b)** No existe; **c)** 4; **d)** 1; **e)** 1; **f)** 0; **g)** 6; **h)** 1; **i)** -1/3; **j)** 0; **k)** 1; **l)** -1/2

Ejercicios 1.6

1. **a)** 7/3; **b)** 2; **c)** 1/2; **d)** $-\sqrt[3]{-9}/4$; **e)** 17; **f)** 0; **g)** 3; **h)** -3; **i)** $\sqrt{2}/4$; **j)** $(3a-1)/2$; **k)** -20/3; **l)** 64; **m)** -9/5 **n)** $3+e$; **ñ)** -1/6 **o)** $(-1/6)^{2/3}$

Ejercicios 1.7

1. **a)** 1/2; **b)** No existe; **c)** 6; **d)** -8; **e)** 0; **f)** 6; **g)** 27; **h)** No existe; **i)** -1/4; **j)** -1; **k)** -1; **l)** 1; **m)** 0; **n)** 15; **ñ)** 4; **o)** 12; **p)** -40/3; **q)** 2

Ejercicios 1.8

1. No necesariamente, debido a que la existencia del límite no depende del valor de $f(c)$, como es el caso donde hay un hueco o un punto desplazado.
2. El límite puede existir, como es el caso en que la función puede tener un hueco en $x = c$, pero el límite no depende del valor de $f(c)$.
3. No necesariamente, como es el caso en el que en $x = c$ hay un punto desplazado, $c \in Dom\, f$ y $f(c) \neq L$.
4. **a)** $\sqrt{2}/4$, **b)** 1/10; **c)** -4; **d)** 5/4; **e)** 1/28; **f)** 1/32 **g)** 1/4; **h)** 2/3; **i)** -5/8; **j)** $1/2\sqrt{x}$; **k)** 1; **l)** 1/2; **m)** 2; **n)** 1; **ñ)** 1/6 **o)** $\sqrt{b/a}$

Ejercicios 1.9

1. **a)** 5/4; **b)** 6/7; **c)** 0; **d)** 4; **e)** No existe; **f)** 1/2; **g)** 0; **h)** 0; **i)** 1/4; **j)** 1/2; **k)** -2; **l)** 1/2

Ejercicios 1.10

1. **a)** $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -5;1$.
   b) $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$;
   c) $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -5/2$;
   d) $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 7$
2. La recta $x = -5$ es una asíntota vertical de $f(x)$
3. si $g(c) \neq 0$ y $h(c) = 0$
4. **a)** $-\infty$; **b)** $-\infty$; **c)** $+\infty$;
   d) $-\infty$; **e)** $+\infty$; **f)** $-\infty$.
5. **a)** Asíntota vertical en $x = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
   b) Asíntota vertical en $x = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
   c) Asíntota vertical en $x = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
   d) Asíntota vertical en $x = -2$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$
   Asíntota vertical en $x = 2$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
   e) Asíntota vertical en $x = -1$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$
   Asíntota vertical en $x = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
   f) Asíntota vertical en $x = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
   g) Asíntota vertical en $r = 8$; $\lim_{r\to 8^-} h(r) = -\infty$ y $\lim_{r\to 8^+} h(r) = +\infty$
   h) Asíntota vertical en $t = 2$; $\lim_{t\to 2^-} g(t) = -\infty$ y $\lim_{t\to 2^+} g(t) = +\infty$
   i) Asíntota vertical en $s = 3$; $\lim_{s\to 2^-} g(s) = +\infty$ y $\lim_{s\to 3^+} g(s) = -\infty$
   j) Asíntota vertical en $s = 0$; $\lim_{s\to 0^+} h(s) = +\infty$
   k) Asíntota vertical en $r = 2$; $\lim_{r\to 2^-} f(r) = +\infty$ y $\lim_{r\to 2^+} f(r) = -\infty$
   Asíntota vertical en $r = 10$; $\lim_{r\to 10^-} f(r) = -\infty$ y $\lim_{r\to 10^+} f(r) = +\infty$
   l) Asíntota vertical en $x = -1$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
6. Tiene infinitas tangentes verticales. A la izquierda del eje de las abscisas, en: $x = -\pi/2$, $x = 2\pi n + \pi/2$ para $n \in Z^-$. A la derecha del eje de las abscisas, en: $x = \pi/2$, $x = 2\pi n - \pi/2$ para $n \in Z^+$.
7. No necesariamente.
   Por ejemplo $f(x) = (x^2 - 2)/(x - 2)$ no está definida en $x = 2$, y la recta $x = 2$ no es asíntota vertical de $f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.
8. Porque no estaríamos hablando de una función, recuerda la prueba de la recta vertical para verificar si una ecuación representa o no a una función.

9. Sin luz, el tamaño de la pupila aumenta a 40 *mm*. Cuando recibe una cantidad infinita de luz, el tamaño de la pupila disminuye a 6 *mm*.

Ejercicios 1.11

1. Que x se aproxima a menos infinito.

   Que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=L$.

   La función $f(x)$ decrece sin límite cuando x se hace infinitamente grande, es decir, el límite no existe.
2. La recta $y = 11$ es una asíntota horizontal.
3. Porque la representación gráfica de una función puede oscilar en un intervalo finito, y luego tener un comportamiento asintótico.
4. **a)** Asíntota horizontal en $y = 1$.
   b) Asíntota horizontal en $y = 1$.
   c) No tiene asíntotas horizontales.
   d) Asíntota horizontal en $y = 0$.
   e) Asíntota horizontal en $y = 0$.
   f) Asíntota horizontal en $y = 1$.
   g) No tiene asíntotas horizontales.
   h) Asíntota horizontal en $y = 3$.
   i) Asíntota horizontal en $y = -3$.
   j) Asíntota horizontal en $y = 0$.
   k) No tiene asíntotas horizontales.
   l) Asíntota horizontal en $y = 0$.
   m) Asíntota horizontal en $y = -3$.
   n) No tiene asíntotas horizontales.
   ñ) No tiene asíntotas horizontales.
5. **a)** Asíntotas horizontales en $y = -1$, $y = 1$.
   b) Asíntota horizontal en $y = -1$
   c) Asíntota horizontal en $y = 0$.
   d) Asíntotas horizontales en $y = -\sqrt{3}/2$, $y = \sqrt{3}/2$.
   e) Asíntotas horizontales en $y = -1$, $y = 1$.
   f) Asíntotas horizontales en $y = \sqrt{3}/3$.
   g) Asíntota horizontal en $y = 7/2$.
6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Ejercicios 1.12

1. No, porque el $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe. La representación gráfica de f es el punto $(5, -3)$.
2. La función f es continua en el número real c, si

   i) $f(c)$ está definida en c,

   ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, y

   iii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
3. Si, son continuas en cada uno de sus puntos.
4. En los valores x para los cuales $f(x)$ no está definida, la función es discontinua. Pero hay casos en los que f puede estar definida para todo $x \in R$ y tener un salto finito en un valor de x. Por lo que, si se conoce el dominio de f, no necesariamente se puede determinar si es continua en un punto dado.
5. **a)** No es continua en $x = -1$.
   b) Es continua en $x = -1$.
   c) No es continua en $x = -1$.
   d) No es continua en $x = -1$.
   e) Es continua en $x = -1$.
   f) No es continua en $x = -1$.

Ejercicios 1.13

1. La función h es discontinua en:
   - $x = -5$. Discontinuidad inevitable de salto finito.
   - $x = -3$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
   - $x = -1$. Discontinuidad evitable.
   - $x = 2$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
   - $x = 5$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
   - $x = 6$. Discontinuidad evitable.
   - $x = 7$. Discontinuidad evitable.
3. **a)** Tiene una discontinuidad en:
   - $x = -2$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
   - $x = 2$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.

b) Tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = -5$.

c) Tiene una discontinuidad evitable en $r = -1$.

Función redefinida: $h(r) = \begin{cases} \dfrac{r^2 - 1}{r + 1}, & r \neq -1 \\ -2, & r = -1 \end{cases}$

d) Tiene una discontinuidad en:

- $t = -1$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
- $t = 0$. Discontinuidad evitable.

  Solo la discontinuidad en $t = 0$ se puede remover. La función redefinida, es

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t^2 + t}, & t \neq -1 \text{ y } t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

e) Tiene una discontinuidad en:

- $s = (3 - \sqrt{13})/2$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.
- $s = (3 + \sqrt{13})/2$. Discontinuidad inevitable de salto infinito.

4. a) La función $f(x)$ tiene una discontinuidad no removible de salto finito en $x = 4$.

b) La función $g(s)$ tiene una discontinuidad removible en $s = -5$.

c) La función $h(t)$ tiene una discontinuidad no removible de salto infinito en $t = -4$.

Y tiene una discontinuidad evitable en $t = 3$.

d) La función $f(x)$ tiene una discontinuidad no removible de salto finito en $x = 0$.

Ejercicios 1.14

1. La función $h(x)$ es continua en: (-7, 5), (-5,-3), (-3, -1), (-1, 2), (2, 3),(3, 5), (5, 6), (6, 7) y (7, ∞).

3. a) $(-\infty, \infty)$;

b) $(-\infty, -5)$ y $(-5, \infty)$;

c) $(-\infty, -1)$ y $(-1, \infty)$;

d) $(-\infty, 4)$ y $(4, \infty)$.

UNIDAD 2

Ejercicios 2.1

1. $f'(x) = 0$ en los puntos D, F y H
   $f'(x) > 0$ en los puntos A, E, I y M
   $f'(x) < 0$ en los puntos C, G y K
   $f'(x)$ no existe en los puntos B, J y L
2. $f'(x) = g'(x) = h'(x) = 3x^2 + 4x$
   La representación gráfica de la derivada de una función no cambia si a la función se le suma o se le resta una constante.
3. $h'(x) = 5x^4$, $h''(x) = 20x^3$, $h'''(x) = 60x^2$, $h^{(4)}(x) = 120x$, $h^{(5)}(x) = 120$, $h^{(6)}(x) = 0$.
   En cada derivada el exponente disminuye una unidad.

Ejercicios 2.2

1. **a)** $f'(x) = 4x$; **b)** $y'(s) = 10s^9$;
   c) $f'(r) = 2\pi$; **d)** $h'(x) = 8\sqrt{3}\,x^3$;
   e) $g'(x) = 50x/9$; **f)** $u'(x) = 4\pi r^2$.
2. $f(x) = x^3$
3. $m = 4$

Ejercicios 2.3

1. **a)** $[f(x) - g(x)]' =$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)+g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x) - g'(x)$$
2. $f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$
3. **a)** $y' = 3x^2$;
   b) $g'(s) = 9s^2 + 2$,
   c) $y'(s) = 2(5x - 1)$;
   d) $y' = 3x^2/2 - 3/4$;
   e) $f'(x) = 20x^9 - 5x^4$;
   f) $h'(x) = -20x$;
   g) $y' = x^3 + x^2 + x + 1$;
   h) $y' = 8x + 3$
   i) $h'(t) = 10at + 5b$;
   j) $v'(t) = mt^{m-1} + 2mt$
4. **a)** $f(x) = x^2 + 3x + a$, donde a es cualquier número real
   b) $f(x) = 4x^2 - 5x + b$, donde b es cualquier número real
   c) $f(x) = 3x^3 - x/3 + c$, donde c es cualquier número real
5. Dos funciones distintas pueden tener la misma derivada, porque la derivada de una constante es cero. Por ejemplo: $y = x + 2$, $g = x - 3$. Para ambas funciones que son distintas, la derivada es la misma función.
6. $P(1/2, 1/2)$

Ejercicios 2.4

1. **a)** $h'(t) = 10at + 5b$;
   b) $y' = 2x^2(18x^3 - 10x^2 + 6x - 3)$;
   c) $g'(s) = -3s^2 + 4s + 2$;
   d) $f'(t) = 2t(3t + 1)$
   e) $h'(s) = 48(2s + 1)^2$;
   f) $g'(x) = 2x(3x^4 + 8x^2 - 2)$;
   g) $h'(x) = \pi(3\pi x^2 - 1)$;
   h) $u'(t) = 4t^3 + 3t^2 + 4t + 1$
   i) $y' = 7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x - 3$
   j) $y' = x^{n-1}[a(n + 1)x + bn]$
2. $(fghs)' = fghs' + fgh's + fg'hs + f'ghs$

Ejercicios 2.5

1. $f'(x) = (x + 6)/5x^3$;
2. $f'(x) = -5/(2x - 3)^2$;

3. $g'(x) = -2a/(x-a)^2$;
4. $y' = x(x+2)/(x+1)^2$;
5. $h'(x) = 1/x^2 + 2x/3 + 1/2$
6. $y' = (x^2+4x+9)/x^4$
7. $h'(t) = -2t(t^3+12t+1)/(2t^3-1)^2$
8. $v'(t) = 6(2x+1)^2$
9. $y' = 3/\sqrt{x}$
10. $f'(x) = -2a/(x-a)^2$
11. $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 3$
12. $f'(x) = (6\sqrt[3]{x}+1)/(3\sqrt[3]{x^2})$
13. $f'(1) = 3$

Ejercicios 2.6

1. $f'(x) = 4x(x^2-3)$
2. Como es resultado conocido que $(g\circ f)' = g'[f(x)]\cdot f'(x)$, entonces $(h\circ g\circ f)' = [h\circ(g\circ f)]' = h'(g\circ f)\cdot(g\circ f)'$ $= h'[g[f(x)]]\cdot g'[f(x)]\cdot f'(x)$
3. $(f\circ g)' = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\sqrt{x}}$

   $(g\circ f)' = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}(x+1)^2}$
4. **a)** $f'(x) = 10x(x^2-a^2)^4$

   b) $h'(s) = \left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 / \sqrt[3]{x^2}$

   c) $g(x) = 1/\left(4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)$

   d) $y' = 20(6x-5)(3x^2-5x+1)^{19}$

   e) $f'(x) = -18(x-1)^{17}\cdot(x^4-2x^3-1)/(x^4+1)^{10}$

   f) $h'(x) = x^2(4x^3-x^2-6x+3)/(x+1)^2$

   g) $y' = -s(s^2-8)/(4-s^2)^{3/2}$

   h) $f'(x) = 2x-3$

   i) $g'(x) = -(x^{5/2}+1)/x^4$

Ejercicios 2.7

1. **a)** $f'(0) = 0$; **b)** $f'(0) = -1/3$; **c)** $f'(0) = 0$
2. **a)** $g'(1) = 6$; **b)** $g'(0) = -2$; **c)** $y'(1) = 0$
3. En (0, 0) y (2, 8). Ecuaciones: $y = 0$, $y = 8$
4. **a)** $y = -x$; **b)** $y = 2x + 8$

Ejercicios 2.8

1. $y' = \left(\dfrac{x-1}{x-3}\right) = -\dfrac{2}{(x-3)^2}$
2. **a)** $y' = 1/(9(3y+2)^2)$

   b) $y' = (3x^2-y)/(x-3y^2)$

   c) $y' = (1-2x)/(9y^2)$

   d) $y' = y^2(3y-4x^3)/(2x^4y-9xy^2+4)$
3. $y' = (1-3x^2y^3)/(3x^3y^2-1)$; $y = -x$
4. $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$; $y = -2x/3 + 10$; $y = -3x/2 + 15$

Ejercicios 2.9

1. **a)** $y'' = 18(5t^4-6t^2+1)$

   b) $y'' = 16/(x^2+16)^{3/2}$

   c) $y'' = (3x^2+2)/(x^3(x^2+1)^{3/2})$
2. $h(x) = f(g(x))$, por lo que $h^{(4)} = 16f^{(4)}(2x)$; $h^{(n)} = 2^n f^{(n)}(2x)$
3. $h^{(n)}(x) = k^n f^{(n)}(kx)$
4. $y' = (x-2)/y$, su valor en $P(3, 1)$ es $y' = 1$; $y'' = (y^2-(2-x)^2)/y^3$, su valor en $P(3, 1)$ es $y'' = 0$. El punto $P(3, 1)$ no es un punto de la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 - 4x = -4$, por lo que no es posible determinar la ecuación de la recta tangente.
5. No tiene ninguna tangente horizontal, porque para cualquier valor $x \in Dom\, f = R - \{0\}$, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom\, f$.
6. Si, en los puntos (0, 0) y (2, 4)
7. La aceleración será cero en 3/2 unidades de tiempo, distancia recorrida: 10.75 unidades de distancia, la velocidad es de 5.75 unidades de distancia/tiempo.

Ejercicios 2.10

1. El ingreso crece a razón de 22400 pesos por año.
2. $400\pi\ cm^2$; $40000\pi\ cm^2$

Ejercicios 2.11

1. **a)** $h'(x) = (6x + 1)/\sqrt{x}$

   b) $f'(t) = (8t + 1)/(3t^{2/3})$

   c) $y' = 4x(x^2 - 3)$

   d) $h'(s) = s(8 - s^2)/(4 - s^2)^{3/2}$

   e) $u'(x) = -(2x + 1)/(2\sqrt{x}\,(2x - 1)^2)$

   f) $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right) - 3$

   g) $g'(x) = (6\sqrt[3]{x} + 1/(3x^{2/3})$

   h) $y' = -\sqrt{a}/\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)^2\right)$

2. **a)** La ecuación $y = 3x + 2$ representa a una linea recta, y en cada punto sobre ella la pendiente de la recta tangente es $y' = 3$. Las rectas tangentes y la recta $y = 3x + 2$ tienen la misma pendiente, por lo tanto, las rectas tangentes tienen por ecuación a $y = 3x + 2$. En conclusión: la ecuación de la recta tangente en cada punto de una línea recta, es la ecuación de la línea recta a la que son tangentes los puntos.

   b) $y = 2x + 4$; **c)** $y = 1/2$

3. **a)** La razón de cambio del área respecto al radio.

   b) $dA/dt = 4\pi r\ cm^2/seg$

   c) $40\pi r\ cm^2/seg$

4. $dV/dt = 20\pi r^2\ cm^3/seg$

5. $dA/dt = 20\pi\ cm^2/seg$

6. $dh/dt = 32/(25\pi)\ cm/min$

Ejercicios 2.12

1. **a)** $$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$$

   b) $$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (0) - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

   c) $$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (0) - (\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\csc x \cot x$$

2. **a)** $f'(x) = -\cos x$

   b) $h'(t) = t(2t - 3)\cdot\operatorname{sen} t + (3 - 4t)\cdot\cos t$

   c) $g'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

   d) $u'(x) = \operatorname{sen} x + \sec x\cdot\tan x$

   e) $g'(x) = 2(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)$

   f) $g'(x) = 3(\cos x - 1)$

   g) $h'(x) = (-x\cdot\operatorname{sen} x - 2\cdot\cos x + 4)/x^3$

   h) $f'(x) = 4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

   i) $u'(x) = \sec x \tan x$

   j) $g'(x) = -2(\cos x - 2\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + 2\cos x)$

Ejercicios 2.13

1. **a)** $y' = 5\sec^2(5x)$

   b) $v'(t) = (\cos t)/(2\sqrt{\operatorname{sen} t})$

   c) $$v'(t) = \frac{(3t + 2)\cos(3t^2 + 4t - 2)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3t^2 + 4t - 2)}}$$

   d) $y' = -4\cdot\csc^2(2x)$; **e)** $y' = -\pi\cdot\csc^2(\pi x/2)$

   f) $h'(x) = -2x\operatorname{sen} x^2$; **g)** $f'(x) = -2\operatorname{sen} x \cos x$

   h) $f'(x) = -2\operatorname{sen}(2x)$; **i)** $y' = 6\sec^2(2x)$

   j) $f'(x) = (\operatorname{sen} x)(3 - 2\cos x) + 1$

   k) $f'(x) = \operatorname{sen}(2x)\cdot(6 - 4\cos(2x)) + 2$

2. $$f'(x) = \frac{6\cos\left(\frac{3x}{x+2}\right)}{(x + 2)^2}$$

3. $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\operatorname{sen} x$; $f'''(x) = -\cos x$
   $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$; $f^{(5)}(x) = \cos x$; $f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen} x$
   $f^{(7)}(x) = -\cos x$; $f^{(8)}(x) = \operatorname{sen} x$

   Siempre se tiene el siguiente patrón:
   $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\operatorname{sen} x$

   Así que $f^{(k)}(x) = \operatorname{sen} x$, para $k = 4n,\ n \in N$.

4. $f^{(8)}(x) = 2\operatorname{sen} x$

Ejercicios 2.14

1. **a)** $\pi/3$; **b)** $-\pi/4$; **c)** $\sqrt{3}/2$
2. **a)** $\sqrt{1-x^2}$; **b)** x **c)** $\sqrt{1-x^2}/x$

Ejercicios 2.15

1. **a)** $y' = x^2/\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \operatorname{arcsen} x$

   b) $y' = -3\pi x^2/\sqrt{1-\pi^2 x^6}$

   c) $y' = 3(\arctan x)^2/(x^2+1)$

   d) $y' = 1/\left(x\sqrt{x^4-1}\right)$

Ejercicios 2.16

1. **a)** 4; **b)** -2; **c)** 7/2; **d)** 2, -2; **e)** $x = -2$
2. Se debe elevar al cuadrado
3. $f(3) = 8\pi^3$
4. $g(-3) = 27$
5. 9 horas

Ejercicios 2.17

2. **a)** $y' = e^x(1-\cot x)\csc x$

   b) $y' = e^{x\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x + x\cos x)$

   c) $y' = e^x(\operatorname{sen} x + x\cos x)$

   d) $y' = e^{\operatorname{sen} x}(x\cos x + 1)$

   e) $f'(x) = e^{2x}/(2(e^{2x}+3)^{3/4})$

   f) $g'(x) = e^{\cos x}(\cos x - \operatorname{sen}^2 x)$

   g) $h'(x) = e^{x^3}\cos x\,(3x^2\cos x - 2\operatorname{sen} x)$

   h) $f'(x) = -2x(x^2-1)e^{-x^2}$

3. $f''(x) = e^x(x+2); f'''(x) = e^x(x+3)$;

   $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
4. $f(x) = e^{x^2}$

Ejercicios 2.18

1. **a)** 5 **b)** 8 **c)** -3

   d) 0 **e)** 1 **f)** 1
2. x
3. **a)** 50 **b)** 5 **c)** 5

   d) 5/2 **e)** 2

Ejercicios 2.19

1. **a)** $f'(x) = 2x/(x^2+1)$ **b)** $g'(x) = 1/\left(3(\ln x)^{\frac{2}{3}}\right)$

   c) $g'(x) = 2\cot x$
2. $f(x) = x + 1$; $g(x) = \log_{10} x$; $s(x) = \sqrt{x}$

   $$h'(x) = s'[g[f(x)]]\cdot g'[f(x)]\cdot f'(x)$$
   $$= s'[\log_{10}(x+1)]\cdot g'[x+1]\cdot 1$$
   $$= \frac{1}{2\sqrt{\log_{10}(x+1)}}\cdot\frac{1}{(x+1)\log(10)}\cdot 1$$
   $$= \frac{1}{2\log(10)(x+1)\sqrt{\log_{10}(x+1)}}$$

3. **a)** $f'(x) = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} +$

   b) $h'(x) = 3e^{\ln x^3}/x$

   c) $g'(x) = 3x^2 e^{\ln(x^3-1)}/(x^3-1)$

   d) $f'(x) = (3x^2+2)/(x^3+2x)$

   e) $y' = \dfrac{-x^2-6x+3}{(x+3)(x^2+3)\log(3)}$

4. **a)** $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2\ln x^2 + 4x - 2)}{x^2}$

   b) $h''(x) = 2(1-x^2)/(x^2+1)^2$
5. $y = x - 1$

UNIDAD 3

Ejercicios 3.1

1. Es creciente en: $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$
Es decreciente en: $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$

3. **a)** creciente; **b)** constante;
c) no decreciente; **d)** decreciente

e) $f(x) = \begin{cases} 3, & (-\infty, 0) \\ \dfrac{x^2}{3}, & [3, 6] \\ 12, & (6, +\infty) \end{cases}$

f) $f'(-1) = \dfrac{2}{3}$. Si, creciente.

5. **a)** $f'(x)$ positiva para $x < 2$; f creciente
b) $f'(x)$ negativa para $x > 2$; f decreciente
c) $f'(2) = 0$
d) La derivada es una línea recta decreciente que es positiva para $x < 2$, negativa para $x > 2$ y se intercepta con el eje de las abscisas en el punto $(2, 0)$.

Ejercicios 3.2

1. Ninguno

2. **a)** máx. abs. $P(0, 4)$
b) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. abs. $P(-2, 0)$ y $P(2, 0)$
c) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. abs. $P(2, 0)$
d) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. abs. $P(-2, 0)$
e) máx. abs. $P(0, 4)$
f) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. rel. $P(2, 0)$
g) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. rel. $P(-2, 0)$
h) máx. abs. $P(0, 4)$; mín. abs. $P(-1, 3)$ y $P(1, 3)$

3. **a)** máx. $f(x)$ $P(0, 7)$; mín $f(x)$ $P(2, -5)$
b) máx. $f(x)$ $P(3, 69)$; mín. $f(x)$ $P(-1, 5)$ y $P(1, 5)$
c) máx. $f(x)$ $P(1, 1)$; mín $f(x)$ $P(0, 0)$
d) máx. $f(x)$ $P(2, 5.657)$; mín. $f(x)$ $P(0, 0)$ y $P(6, 0)$

Ejercicios 3.3

2. **a)** creciente en $[2, 4]$; decreciente en $(-\infty, 2]$ y $[4, +\infty)$
b) creciente en $(-\infty, 2]$ y $[4, +\infty)$; decreciente en $[2, 4]$
c) creciente en $(2, 4]$ y $[6, +\infty)$; decreciente en $(-\infty, 2]$ y $[4, 6]$

3. $f(x)$ es impar; decrece en $(-\infty,-1]$ y $[1,+\infty)$; crece en $[-1,1]$

4. **a)** $f'(x) = 25x^4 - 6x^2 + 1$ es par
b) Por ser $f(x)$ impar, $f(-x) = -f(x)$.
Por la regla de la cadena
$$f'(-x) = [f(-x)]' = (-1)[f(-x)]'$$
$$= -[-f(x)]' = [f(x)]' = f'(x)$$

5. $f(x)$ es par.
$$[f(-x)]' = (-1)\left[\frac{1}{1 + (-x)^2}\right]'$$
$$= -\left[\frac{1}{1 + (x)^2}\right]' = -f'(x)$$

6. **a)** $Dom\, f = R$
$f(x)$ creciente en $(-\infty, -4]$ y $[1, +\infty)$
$f(x)$ decreciente en $[-4, -1]$
b) $Dom\, f = R - \{0\}$
$f(x)$ decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, 3]$
$f(x)$ creciente en $[3, +\infty)$
c) $Dom\, f = [0, 6]$; $f(x)$ creciente en $[0, 3]$
$f(x)$ decreciente en $[3, 6]$
d) $Dom\, g = R - \{1\}$
$g(x)$ creciente en $(-\infty, -1]$ y $[3, +\infty)$
$g(x)$ de creciente en $[-1, 1)$ y $(1, 3]$
e) $Dom\, h = R$
$h(x)$ decreciente en $(-\infty, 0]$ y
$h(x)$ creciente en $[0, +\infty)$

Ejercicios 3.4

2. **a)** mín. $P(3, -22)$
b) máx. $P(-14/3, 56.8)$, mín. $P(0, 6)$
c) mín. $P(1, -1)$
d) máx. $P(2, 32)$, mín. $P(6, 0)$

3. máx. $P(-1, 2)$, mín. $P(1, -2)$

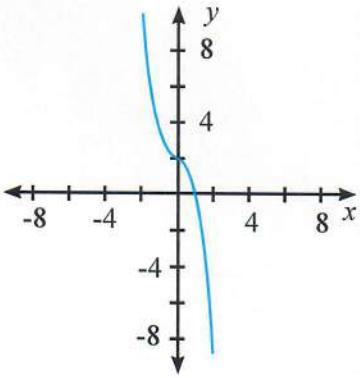
4. mín. $P(0, 0)$. Criterio de la primera derivada

5. **a)** mín. $P(-1, -1/e)$;
   Punto de inflexión $P(-2, -2/e^2)$

   b) mín. $P(1/2, 4)$

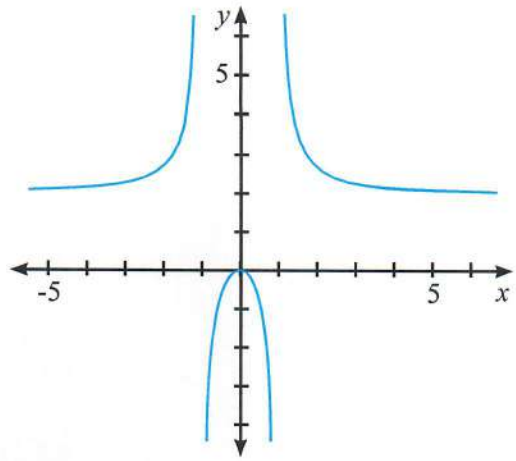
Ejercicios 3.5

1. **a)** $y = -x^3 - x + 2$
   - *Dom f*: *R*, *Rango f*: *R*,
   - Intersecciones con los ejes: $P(1, 0)$ y $P(0, 2)$
   - No es par ni impar
   - No tiene asíntotas verticales ni horizontales
   - No tiene extremos absolutos, ni relativos
   - Cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$
   - $P(0, 2)$ punto de inflexión



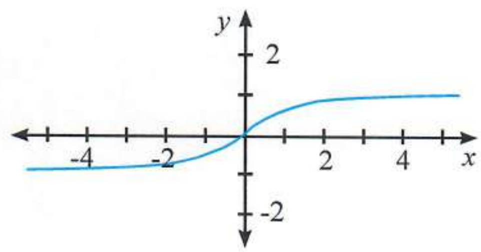
f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

- *Dom f*: $R - \{-1, 1\}$,
- *Rango f*: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Intersección con los ejes: P(0, 0)
- $f(x)$ es par
- Asíntotas verticales: $x = \pm 1$;
  Asíntota horizontal: $y = 2$
- máx. relativo: $P(0, 0)$
- No tiene puntos de inflexión
- Cóncava en $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$.
  Convexa en $(-1, 1)$



j) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

- *Dom f*: *R*, *Rango f*: $\{y \in R | -1 < y < 1)\}$
- Intersección con los ejes: $P(0, 0)$
- $f(x)$ es impar
- Asíntotas horizontales: $y = \pm 1$
- No tiene máximos ni mínimos
- Cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$
- $P(0, 0)$ punto de inflexión



Ejercicios 3.6

1. La longitud del lado del cuadrado a cortar es de 5 *cm*
2. La longitud del lado del cuadrado a cortar es de 4 *cm*
3. El volumen máximo es de 200 cm^3
4. Largo: 60 *m*; ancho: 30 *m*
5. Largo: 48 *m*; ancho: 24 *m*
6. Largo: 24 *cm*; ancho: 48 *cm*
7. Largo: 24 *cm*; ancho: 20 *cm*

Fórmulas de álgebra y trigonometría

Productos notables

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Factorización

$ab + ac = a(b + c)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$

$mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$

Propiedades de los exponentes

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (ab)^m = a^m b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^m}$

$a^0 = 1,$ para $a \neq 0$

Relación potencia-radical

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Propiedades de los radicales

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$, k natural. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Para n impar, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Para n par, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = |a|$; en particular $\sqrt{a^2} = |a|$

Propiedades de los logaritmos

$\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

$\log_b\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$

$\log_b A^n = n\log_b A$ $\quad \log_b \sqrt[n]{A} = \dfrac{\log_b A}{n}$

$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Fórmula general. Las raíces de la ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Identidades trigonométricas básicas

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Identidades trigonométricas pitagóras

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$$
$$\tan^2\beta + 1 = \sec^2\beta$$
$$\cot^2\beta + 1 = \csc^2\beta$$

Sumas de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Identidades del ángulo doble

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Propiedades de los límites

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$
7. $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
8. $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$
   cuando n sea par.

Límites trigonométricas

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

Límites exponenciales

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ 2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

Fórmulas de derivación

Notación que se usa en el libro de Cálculo I

Reglas básicas

1. Si $f(x) = k$, con k constante, $f'(x) = 0$.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $[k f(x)]' = k f'(x)$
4. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
5. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
6. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
7. $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
8. $[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x)\, f'(x)$

Trigonométricas

9. $(\text{sen } x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\text{sen } x$
11. $(\tan x)' = \sec^2 x$
12. $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$
13. $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$
14. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

Trigonométricas inversas

15. $(\text{arcsen } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, con $-1 < x < 1$
16. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, con $-1 < x < 1$
17. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, con $x \in R$
18. $(\text{arccsc } x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$
19. $(\text{arcsec } x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$
20. $(\text{arccot } x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$, con $x \in R$

Exponenciales

21. $(e^x)' = e^x$
22. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
23. $(a^{u(x)})' = (\ln a) \cdot a^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logarítmicas

24. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
25. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(\ln a)x} = \dfrac{\log_a e}{x}$

Fórmulas de derivación

Opción 2

Reglas básicas

1. Constante: $\frac{d}{dx}k = 0$
2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x)$
3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)\,g(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$
5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$
7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\,g'(x)$

Trigonométricas

9. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas

15. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$
18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1 + x^2}$
19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$
20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Exponenciales

21. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
22. $\frac{d}{dx}a^x = a^x(\ln a)$

Logarítmicas

23. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$
24. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{(\ln a)\,x} = \frac{\log_a e}{x}$

Fórmulas de derivación

Opción 3

Reglas básicas

1. $\frac{d}{dx} k = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v + w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} ku = k\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{k}\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
9. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

Trigonométricas

10. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \cdot \tan u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cdot \cot u \frac{du}{dx}$

Trigonométricas inversas

16. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$

Exponenciales

22. $\frac{d}{dx} e^u = e^u\frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Logarítmicas

24. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \log u = \frac{\log e}{u}\frac{du}{dx}$

CÁLCULO I
Cálculo diferencial por competencias

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Cruz Evelia Sosa Carrillo
Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en agosto de 2020
en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos,
calle Río Usumacinta 821, Col. Industrial Bravo.
Tel. (667)712-2517 y (667)712-2950

Esta obra consta de 12 500 ejemplares